This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 491508

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

PAR

C. BERGMANS

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE GAND
CHARGÉ DE COURS A L'ÉCOLE NORMALE DES SCIENCES ANNEXÉE A L'UNIVERSITÉ DE LA MÊME VILLE

A L'USAGE

DES CLASSES MOYENNES (A PARTIR DE LA 5e)
DES HUMANITÉS LATINES ET MODERNES DES ATHÉNÉES ET DES COLLÈGES
ET CONFORME AUX PROGRAMMES OFFICIELS.

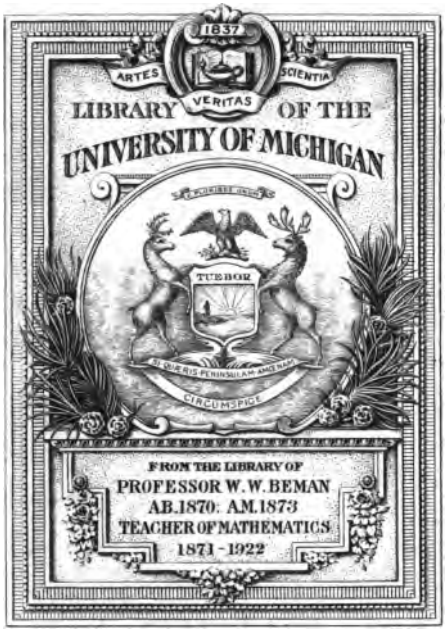
APPENDICES : Différents systèmes de numérations. — Numération des Grecs et des Romains. — Théorie élémentaire des congruences. — Unités employées pour les mesurages. (Système métrique et décimal des poids et mesures. Mesures anciennement employées dans notre pays. Quelques mesures étrangères. Mesures hollandaises. Mesures anglaises. Mesures allemandes.)

Unités pour le temps. — Calendrier. — Machines à calcul et table de calculs faits. — Vocabulaire étymologique. — Notes diverses.

MONS
HECTOR MANCEAUX, ÉDITEUR

1890

Digitized by Google



Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
103
.B499t

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

PAR

Charles BERGMANS, 1830 —
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE GAND
CHARGÉ DE COURS A L'ÉCOLE NORMALE DES SCIENCES ANNEXÉE A L'UNIVERSITÉ DE LA MÊME VILLE

A L'USAGE

DES CLASSES MOYENNES (A PARTIR DE LA 5e)
DES HUMANITÉS LATINES ET MODERNES DES ATHÉNÉES ET DES COLLÈGES
ET CONFORME AUX PROGRAMMES OFFICIELS.

APPENDICES : Différents systèmes de numérations. — Numération des Grecs et des Romains. — Théorie élémentaire des congruences. — Unités employées pour les mesurages. (Système métrique et décimal des poids et mesures. Mesures anciennement employées dans notre pays. Quelques mesures étrangères. Mesures hollandaises. Mesures anglaises. Mesures allemandes.)

Unités pour le temps. — Calendrier. — Machines à calcul et table de calculs faits. — Vocabulaire étymologique. — Notes diverses.

MONS
HECTOR MANCEAUX, ÉDITEUR
1890

Digitized by Google

ABRÉVIATIONS.

B A B. — *Bulletins de l'Académie des Sciences* de Belgique.
B B. — *Bullettino di Bibliografia* du prince Boncompagni.
C M P. — *Correspondance mathémathique et physique* de Garnier et Quetelet.
C R A. — *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* de Paris.
Crelle. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées* fondé par Crelle.
J L. — *Journal* de Liouville.
J M. — *Journal de Mathématiques* de Bourget et de Longchamps.
M. — *Mathésis.*
N A M. — *Nouvelles Annales de Mathématiques.*
N C M. — *Nouvelle Correspondance Mathématique.*

W. W. Beman
5-25-1923

Digitized by Google

PRÉFACE.

Omnis vita hominis est numerare.

Il n'existe pas de science dont l'enseignement présente autant de difficulté et en même temps autant d'utilité que l'Arithmétique ; il n'est donc pas étonnant que cette branche des mathématiques ait été, de tout temps, l'objet des méditations des savants les plus illustres. Cependant il y a peu d'ouvrages connus qui satisfassent complètement aux conditions qui s'imposent quand il s'agit d'enseignement ; cela provient du point de vue auquel se placent les auteurs : pour les uns, il est inutile de pousser les connaissances au-delà de quelques règles de calcul ; pour les autres, tout se réduit à l'étude de la métaphysique de la science. En général, on constate que les auteurs ne se préoccupent pas assez des transformations successives que subit l'intelligence des élèves à mesure qu'ils avancent en âge ; à ces transformations doivent correspondre différentes phases dans la méthode à suivre pour l'enseignement, et cette gradation exige l'emploi de livres conçus et rédigés d'une manière bien différente pour chaque période ; c'est ce que nos maîtres en pédagogie, les Allemands, ont parfaitement compris et mis en pratique avec un plein succès.

425865

Digitized by Google

On s'accorde généralement à reconnaître que l'étude complète de l'arithmétique doit comprendre une période préparatoire, puis une période pratique ne portant que sur les parties les plus importantes mais aussi les plus simples; une période complémentaire où la discussion est généralisée; enfin une période où l'on s'occupe des parties tout à fait supérieures de la science. Comme l'a dit *Macé*, le premier calculateur n'a pas débuté par les règles abstraites qu'on trouve dans les livres d'école; la vraie méthode est de replacer l'élève dans les conditions du commencement, et de le faire assister en quelque sorte à la création de l'arithmétique. En s'inspirant de ces principes, on devra considérer quatre périodes dans l'enseignement de l'arithmétique.

Dans la première, on familiarise l'élève avec l'idée du nombre; on l'habitue à composer et à décomposer des nombres très simples : cet enseignement doit être surtout intuitif; comme exercices, des problèmes tout à fait élémentaires avec des nombres à la portée des enfants; c'est la période où l'on n'emploie pas de livre mais seulement le boulier-compteur.

Dans la deuxième, l'élève s'initie au langage arithmétique; il apprend les règles usuelles du calcul numérique; il s'exerce à la résolution de problèmes tirés de la vie pratique et servant d'application aux opérations fondamentales du calcul; il étudie à fond le système légal des poids et mesures et il en fait de nombreuses applications; enfin il continue à se servir, dans toutes les occasions, du calcul mental pour exercer cette précieuse faculté. Tel doit être le programme des classes inférieures des athénées; le livre qui servira à cet enseignement sera simple et pratique, sans développements inutiles; il exposera les règles de calcul avec de nombreux calculs résumant tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. C'est le programme que j'ai tâché de réaliser dans un *Précis d'arithmétique* dont l'emploi est autorisé dans nos établissements officiels.

Digitized by Google

La troisième période correspond aux classes de 5e, 4e et 3e des collèges et des athénées ; le cours est destiné alors à des jeunes gens qui se préparent aux carrières libérales, à tous ceux dont l'intelligence doit être développée avec soin par de fortes études, et, en particulier, aux candidats des écoles spéciales. Ces élèves ont déjà été suffisamment exercés à la pratique des calculs ordinaires et à la résolution des problèmes élémentaires ; l'enseignement doit affecter un caractère spécial ; si au début il convient de suivre l'ordre historique, plus tard il importe de suivre l'ordre logique : les théories seront complètement et rigoureusement développées ; les élèves seront exercés à s'occuper des vérités purement spéculatives et même inutiles dans la vie pratique puisqu'elles peuvent servir à aiguiser l'esprit ; mais on ne les fatiguera pas par des discussions oiseuses et sans importance qui pourraient leur faire oublier les idées principales. Comme il faut que les jeunes gens s'habituent de bonne heure à vaincre les difficultés par eux-mêmes et sans réclamer constamment l'intervention du professeur, le rôle de celui-ci doit surtout consister à s'assurer que les élèves ont bien saisi les théories. Le programme comprendra l'exposé des règles pour les calculs abrégés qui ne peuvent être bien appliquées que par ceux qui connaissent l'esprit des méthodes ; à ce propos nous dirons qu'il est vraiment désolant de devoir constater qu'on ne tire aucun profit du trésor de découvertes faites par les savants ; que de procédés intéressants qui n'ont jamais été extraits des publications scientifiques où ils se trouvent ! On s'occupera aussi des nombreux types de problèmes qui servent à aiguiser la perspicacité des élèves en les obligeant à rechercher les conditions tant implicites qu'explicites de ces questions.

C'est d'après ce programme que je publie aujourd'hui ce *Traité d'arithmétique élémentaire*. J'ai tâché de le rendre aussi complet que possible en dépouillant consciencieusement les ouvrages et les revues scientifiques qui pouvaient me fournir des matériaux pour mon travail ; je n'ai négligé aucun détail propre à développer la faculté du calcul où à piquer la curiosité des jeunes gens ; j'ai exposé assez longuement le calcul des

Digitized by Google

nombres complexes, quoiqu'il ait perdu quelque peu de son importance depuis l'adoption de plus en plus générale du système métrique décimal ; c'est qu'il est encore indispensable à ceux qui sont en relation d'affaires avec l'Angleterre et qu'il fournit d'excellents exercices de calcul par l'emploi des parties aliquotes ; j'ai décrit notre système légal des poids et mesures avec tous les détails que son importance comporte ; je me suis occupé aussi de nos anciennes mesures locales ainsi que des systèmes métriques usités dans les pays limitrophes ; j'ai ajouté une notice sur les machines à calcul : ces appareils qui peuvent faciliter les calculs sont couramment employés en Angleterre et en France, tandis qu'en Belgique on connaît à peine le nom de la règle à calcul qui peut rendre tant de services à ceux qui sont obligés, par la nature de leurs fonctions, à faire de longs calculs ; il est inutile, je pense, d'insister sur l'utilité du petit vocabulaire étymologique qui termine l'ouvrage et qui permet de connaître à fond la signification des termes qu'on emploie. Enfin pour rendre l'ouvrage tout à fait conforme au nouveau programme officiel, j'ai exposé la théorie des fractions généralisées, quelques définitions relatives aux rapports et aux proportions, la règle de trois simple et composée, le calcul des surfaces et des solides et celui des poids d'un corps. J'ai résolu quelques problèmes servant d'applications à la géométrie, à la cosmographie, à la physique et à la chimie ; enfin j'ai exposé quelques questions numériques de la science du droit : il est bon de montrer aux élèves des classes latines, que la pratique du barreau, aussi bien que celle des autres sciences, exige la connaissance de l'arithmétique.

Afin de ne pas donner au Traité d'arithmétique des dimensions exagérées et incompatibles avec l'usage qu'on doit en faire dans les classes, j'ai supprimé quelques détails qui ont été suffisamments développés dans le Précis : formules des calculs les plus simples, exercices élémentaires sur le système métrique, problèmes types sur les quatre opérations fondamentales, calcul mental ; ensuite le livre est plus sobre d'explications étant destiné à une autre catégorie d'élèves. D'autre part, je n'ai

Digitized by Google

pas hésité à faire usage de la notation en lettres quand les raisonnements pouvaient y gagner en généralité et en clarté : en Allemagne, où l'étude de l'arithmétique va de pair avec celle de l'algèbre, on habitue de bonne heure les élèves à employer les formules et cette méthode est rationnelle ; en effet, les nombres peuvent être considérés sous le rapport de leurs *faits*, ce qui est l'objet de l'arithmétique, et de leurs *lois*, ce qui est l'objet de l'algèbre ; dans certains cas, on ne peut même pas séparer les deux sciences.

On ne trouvera dans le corps de l'ouvrage que les questions classiques ; les développements qui peuvent intéresser les élèves studieux et qui sont nécessaires aux candidats aux écoles spéciales sont réunis dans les appendices et les notes ; on y trouve la théorie des différents systèmes de numération, les méthodes générales relatives à la divisibilité ; quelques propriétés des nombres premiers ; certains procédés abrégés de calcul ; la théorie des congruences de Gauss : cette théorie a reçu de nombreuses applications, de sorte qu'il est utile que les élèves se familiarisent avec elle. J'ai indiqué de nombreuses sources, ce qui m'a évité d'entrer dans des détails qui auraient pû être encombrants et ce qui engagera aussi les jeunes gens à recourir à nos dépôts scientifiques et à se familiariser avec les travaux originaux des savants ; ils verront ainsi ce qui a déjà été fait, et ils seront incités à se livrer à des travaux personnels.

La quatrième et dernière période qui doit servir de couronnement à cet enseignement méthodique de l'arithmétique correspond aux classes supérieures de la section scientifique ; le programme comprend la théorie des fractions continues, celle des approximations numériques et des erreurs relatives et celle des quantités incommensurables ; l'analyse indéterminée ; les propriétés des combinaisons, des arrangements et des permutations ; l'étude des nombres figurés ; l'emploi des logarithmes considérés comme exposants et la construction des tables ; l'élévation aux puissances et l'extraction des racines d'un degré quelconque ; quelques séries ; enfin l'histoire de l'arithmétique.

Digitized by Google

Nous publierons sous peu un ouvrage spécial pour ce degré de l'enseignement; cet ouvrage sera en même temps un complément de l'algèbre qui est intimement liée à l'arithmétique quand on se livre à cet ordre de considérations transcendantes.

Ce n'est que lorsque ces matières ont été étudiées à fond, qu'on peut aborder l'arithmétique supérieure ou *arithmologie* (d'après Ampère) dont les ouvrages élémentaires ne peuvent parler que d'une manière trop sommaire ; cette science, très peu répandue encore, quoique bien ancienne car on doit la faire remonter à Pythagore, est une des plus élevées et des plus attrayantes pour les esprits supérieurs. Nous serions heureux si la série de nos ouvrages sur l'arithmétique pouvait engager nos jeunes savants à s'en occuper ; elle leur offrira un champ fertile en découvertes intéressantes.

C. BERGMANS.

Gand, 31 mai 1890.

Digitized by Google

TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

Notions préliminaires.

1. Parmi les idées les plus simples que les choses font naître en nous, il y a celles de *pluralité* et de *quantité* Nous avons l'idée d'une pluralité quand nous considérons un *tout* composé de parties de même nature et distinctes les unes des autres ; nous avons l'idée d'une quantité quand nous comparons une chose continue, c'est-à-dire une chose formée de parties non distinctes, à une autre de la même espèce pour déterminer combien de fois cette dernière chose ou une de ses parties est contenue dans la première. *Évaluer une pluralité* c'est trouver combien il y a de parties de même nature dans cette pluralité ; ou, comme on le dit, c'est *compter* les parties de la pluralité ; le résultat de cette évaluation est un *nombre*. Nous pouvons aussi évaluer une pluralité en la *mesurant*, c'est-à-dire en déterminant combien de fois elle contient une de ses parties prise comme terme de comparaison ; cette partie est alors dite l'*unité*[1] ; le résultat de la comparaison est la *mesure* de la pluralité ; elle est égale au nombre provenant de l'évaluation dont on a parlé d'abord. Pour *évaluer une quantité* on emploie toujours la deuxième méthode : on mesure la quantité en prenant, pour unité, une autre quantité de la même espèce. Quand on mesure une quantité, il y a deux cas à considérer : la quantité peut être envisagée comme une pluralité dont chaque partie est égale à l'unité; on dit alors que la mesure est *entière ;* ou bien la quantité doit être regardée comme une pluralité dont chaque partie n'est qu'une partie *aliquote*[2] de l'unité ; on dit alors que la mesure est *fractionnaire*[3].

Il résulte de ce qui précède quelques notions spéciales que l'on peut résumer comme suit :

2. Pour mesurer soit une quantité, soit une pluralité on imagine une quantité de la même espèce qu'on appelle *l'unité*, et l'on détermine combien de fois la quantité à mesurer contient l'unité ou une partie aliquote de l'unité.

---

1. On dit quelquefois *l'entier :* une pluralité de trois entiers au lieu de trois unités.

2. Partie contenue un nombre de fois juste dans un tout *(Dict. de l'Académie).*

3. On ne s'occupera que plus tard des quantités qui ne peuvent pas être évaluées au moyen d'une partie aliquote de l'unité. Pour ces généralités on lira avec fruit une œuvre posthume du savant Ampère sur la théorie du calcul élémentaire, année 1845, page 106.

Digitized by Google

3. La qualité de ce qui peut être mesuré s'appelle *grandeur*, et les choses qui sont mesurables portent le nom de *grandeurs :* ce sont des pluralités ou des quantités.

4. Les *mathématiques*[1] se composent de toutes les sciences qui ont pour objet l'étude de la grandeur. (Note I.)

5. Le *nombre* exprime de combien d'unités ou de parties aliquotes de l'unité la grandeur se compose[2]. Le nombre accompagné du nom de l'unité est appelé *concret* par opposition au nombre proprement dit qu'on appelle *abstrait.*

6. Il y a *deux* espèces de nombres : les nombres *entiers* et les nombres *fractionnaires.*

Le nombre entier exprime combien il y a d'unités dans une grandeur ; le nombre fractionnaire exprime combien il y a de parties aliquotes de l'unité dans une grandeur, et en combien de parties égales l'unité a été divisée.

7. Quand l'unité est divisée en un nombre de parties égales exprimé par 10, 100..., c'est-à-dire quand le nombre fractionnaire se compose d'un certain nombre de parties *sous-décuples* de l'unité, elle prend le nom particulier de *fraction décimale* afin de la distinguer de la *fraction ordinaire* pour laquelle la division de l'unité est faite d'une manière quelconque.

Dans certains cas, après avoir évalué une grandeur au moyen d'une partie aliquote de l'unité, il y a encore un reste qu'on évalue avec une nouvelle partie aliquote de la première subdivision de l'unité, etc. ; le nombre ainsi obtenu et qui se compose de fractions partielles se rapportant à des unités dérivant les unes des autres, s'appelle un *nombre complexe.* Ex. 3 jours 8 heures 15 minutes 23 secondes (le jour est l'unité principale) ; 8 mètres 5 décimètres 6 centimètres. Dans le deuxième exemple, le nombre se compose de parties qui se rapportent à des unités de dix en dix fois plus petites ; c'est ce qu'on appelle un *nombre décimal.*

---

1. Pour l'étymologie de ce terme et des autres qui suivront, voir un appendice à la fin de l'ouvrage.

2. Le nombre est une qualité abstraite qui ne tombe pas sous les sens. Euclide l'a défini en disant que c'est l'assemblage d'une multitude d'unités ; pour Newton c'est le rapport abstrait d'une quantité à une autre de même espèce prise pour unité.

Digitized by Google

8. L'**Arithmétique** *est la science des nombres.*

Cette branche des mathématiques se compose de *trois* parties:

1° La NUMÉRATION qui expose les règles adoptées pour former, énoncer, écrire et lire les nombres ;

2° Le CALCUL qui est l'ensemble des règles à suivre pour les opérations qu'on peut faire avec les nombres ;

3° La THÉORIE DES NOMBRES qui a pour objet l'étude des propriétés des nombres[1].

---

1. Les deux dernières parties doivent être étudiées simultanément, puisque la troisième sert à trouver et à démontrer les règles de la deuxième.

Digitized by Google

LIVRE I. — NUMÉRATION.

9. La numération a pour objet : 1° la formation des nombres ; 2° la nomenclature des nombres (numération parlée) ; 3° la représentation abrégée des nombres (numération écrite) ; enfin 4° la lecture des nombres qui sont écrits au moyen de signes abrégés.

CHAPITRE PREMIER.

Formation des nombres.

10. On peut former les nombres en comptant les unités ou les parties de l'unité contenues dans une grandeur.

§ I. — NOMBRES ENTIERS.

11. Pour les nombres entiers, on compte d'abord, une à une, les unités jusqu'à *neuf*; c'est ce qu'on appelle les *unités simples* ; puis on compte les collections de dix unités ou plus simplement les *dizaines*; puis les collections de dix dizaines ou les *centaines*; puis les *mille*, les *dix mille*, les *cent mille*, les *millions*[1], les *dix millions*, les *cent millions*, les *billions* ou *milliards*[2], les *dix billions*, les *cent billions*, les *trillions*[3], etc. Si l'une de ces collections est incomplète, on l'évalue au moyen des collections précédentes.

1. Million en français signifiait d'abord dix tonnes d'or; en 1494 il avait déjà le sens actuel.

2. Le mot milliard pour les finances date du XIXe siècle; il est employé comme synonyme de billion. Les termes billion et trillion furent inventés au commencement du XVIIe siècle ; mais ils ne sont guère employés que depuis le siècle dernier.

3. La numération des Français, des Anglais, des Espagnols et des Allemands diffère de celle des Flamands, des Italiens et des Suédois : le billion des premiers est formé de *mille millions* et celui des derniers de *mille fois mille millions*. Dans le dictionnaire de l'Académie on ne trouve pas les noms des unités ternaires qui suivent les trillions : quatrillion, quintillion, sextillion, septillion, octillion, nonillion et décallion ; remarquons que l'on forme régulièrement ces mots en donnant à la *n*e unité ternaire le nom du quantième *n*-2 latinisé avec la terminaison en *illion*.

Digitized by Google

Dans cette méthode de compter, on prend successivement des unités de dix en dix fois plus grandes; en outre on en fait des groupes ou ordres *ternaires*; ce sont les unités simples, les mille, les millions, les billions, les trillions, etc.

La suite des nombres est illimitée, car quelque grand que soit un nombre on conçoit toujours qu'il puisse être augmenté encore.

12. Au lieu de prendre successivement des unités de dix en dix fois plus grandes, on aurait pu suivre tout autre système; par exemple, pour n'avoir à compter que par *un*, il suffirait de prendre des unités de deux en deux fois plus grandes: ce serait le système *binaire;* pour n'avoir à compter que jusqu'à *deux*, on prendrait des unités de trois en trois fois plus grandes: ce serait le système *ternaire;*.... si l'on comptait jusqu'à *onze*, on prendrait des unités de douze en douze fois plus grandes : ce serait le système *duodécimal.*

On distingue les différents systèmes de numération par la *base*, c'est-à-dire par le nombre qui exprime combien il faut d'unités d'un certain ordre pour faire une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

La base du système de numération que nous employons est *dix* ; c'est pour cette raison que notre numération est dite *décimale.* On ne pourrait employer un autre système qu'en changeant les noms des nombres.

Appendice I.

§ II. — NOMBRES FRACTIONNAIRES.

13. Pour former un nombre fractionnaire, on partage l'unité en un certain nombre de parties égales, on compte ensuite la quotité des parties égales dont se compose le nombre fractionnaire, on est ainsi conduit à considérer deux nombres entiers : le *dénominateur* qui indique en combien de parties égales l'unité a été divisée, et le *numérateur* qui indique de combien de parties aliquotes de l'unité la fraction se compose.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Numération parlée.

§ I. — NOMBRES ENTIERS.

14. Les nombres entiers jusqu'à *neuf* ont reçu respectivement les noms : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit et neuf.

Pour compter les dizaines on a les expressions :

Dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante ou soixante-dix, octante ou quatre-vingts[1], nonante ou quatre-vingt-dix, pour une, deux, trois..... neuf dizaines.

De dix à vingt on a d'abord les nombres :

Onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, pour dix et un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six ; puis on continue en disant : dix-sept, dix-huit et dix-neuf[2].

De vingt à trente on dit : vingt et un, vingt-deux... vingt-neuf ;

De trente à quarante : trente et un, trente-deux... etc., jusqu'à nonante-neuf.

Pour une centaine on dit plus simplement cent ; on a ensuite deux cents, trois cents.... neuf cents; entre deux collections consécutives de centaines il y a nonante-neuf nombres qu'on énonce après le nom de la première des deux collections de centaines : cent vingt.... deux cent treize,.... neuf cent nonante-neuf.

Ensuite on a : mille, deux mille, trois mille,.... neuf mille.

Cette nomenclature est fort simple, ce qui résulte de ce principe de la formation du nombre que : *tout nombre peut être partagé en plusieurs parties composées chacune d'unités d'un certain ordre, en nombre inférieur à dix.*

---

1. Les mots français septante, octante et nonante qui, d'après l'Académie française, ont vieilli, sont pourtant encore employés au midi de la France ; septante et nonante sont aussi employés en Belgique. Condorcet avait même proposé de dire *unante*, *duante*, au lieu de dix, vingt ; ce serait plus logique. Nous remarquerons d'ailleurs que les expressions soixante-douze, etc.., ont une origine fort reculée ; c'est ainsi que sur un chandelier de Notre-Dame, à Tongres, datant du XIVe siècle, on trouve la date MCCCLX et XII.

2. Dans les nombres composés de dizaines et d'unités, en français les dizaines s'énoncent d'abord ; c'est l'opposé en flamand : vingt-trois, drie en twintig.

Digitized by Google

§ II. NOMBRES FRACTIONNAIRES.

15. La règle pour énoncer les fractions ordinaires et décimales résulte du mode de formation de celles-ci : on énonce d'abord le numérateur, puis le dénominateur en ajoutant au nom de celui-ci la terminaison *ième*.

En français il n'y a que trois exceptions : on dit *demi*, *tiers*, *quart*, pour les dénominateurs deux, trois et quatre.

16. Pour les nombres complexes on énonce d'abord le numérateur de chaque partie, puis le nom de l'unité auxiliaire.

Exemple : 3 jours 8 heures 15 minutes 23 secondes ; 8 hectares 31 ares 5 centiares.

CHAPITRE III.

Numération écrite.

17. La numération écrite a pour but d'exposer les conventions d'après lesquelles on écrit les nombres d'une manière abrégée.

§ I. NOMBRES ENTIERS.

18. Pour la numération décimale, on a établi les trois conventions suivantes :

1° On représente les noms des neuf premiers nombres entiers par des caractères qu'on appelle *chiffres*[1], ce sont

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9 ;
un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf ;

2° on est convenu que tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités immédiatement supérieures ;

3° on remplace un chiffre manquant par le caractère 0, qu'on nomme zéro et que l'on considère aussi comme un chiffre.

REMARQUES.

19. I. On a établi la première convention pour ne pas devoir écrire les noms des nombres en toutes lettres, et l'on n'emploie des chiffres que pour les neuf premiers nombres parce que tous les noms des nombres sont formés au moyen des premiers.

---

1. On emploie quelquefois le mot *chiffre* pour désigner le nombre qu'il représente ; c'est ainsi qu'on dit le chiffre 8 pour le nombre 8.

Digitized by Google

On a établi la deuxième convention pour être dispensé d'écrire à côté de chaque chiffre le nom des unités qu'il exprime. On a établi la troisième convention pour conserver à chaque chiffre, sa place par rapport aux chiffres qui sont à sa droite.

20. II. Il y a *dix* chiffres en tout en y comprenant le zéro ; les neuf premiers chiffres sont appelés les *chiffres significatifs*.

21. III. Un chiffre peut avoir deux valeurs suivant le point de vue où l'on se place : la *valeur absolue* est celle qui dépend de la forme du chiffre; la *valeur relative* est celle qui dépend de sa place.

22. IV. Un zéro placé à la gauche d'un nombre entier ne change pas la valeur du nombre, car les chiffres conservent la même valeur absolue et relative ; mais un zéro placé à la droite d'un nombre entier donne à celui-ci une valeur dix fois plus grande, parce que chaque chiffre ayant reculé d'un rang vers la gauche a une valeur relative dix fois plus grande.

Il est clair que lorsqu'un nombre est terminé par un ou plusieurs zéros, on le rendra dix fois plus petit en supprimant un zéro à la droite.

23. Pour écrire un nombre entier qui est énoncé, il peut se présenter deux cas:

1° *Le nombre ne comprend pas d'unités supérieures aux centaines;* on écrit successivement, en commençant par la gauche, les chiffres qui doivent représenter les centaines, les dizaines et les unités simples du nombre énoncé ; quand il n'y a pas d'unité ou pas de dizaine on met un zéro à la place qui devait être occupée par chaque unité manquante.

2° *Le nombre comprend des mille et des unités supérieures:* on écrit successivement, en commençant par la gauche, les nombres des unités ternaires à mesure qu'on les énonce ; et l'on remplace par des zéros les unités qui manquent.

§ II. — NOMBRES FRACTIONNAIRES.

24. Pour écrire une *fraction ordinaire*, on met d'abord le numérateur ; puis le dénominateur au-dessous, en séparant les deux termes par un trait.

25. Pour un *nombre décimal*, on écrit d'abord la partie entière ou un zéro s'il n'y en a pas; puis une virgule, enfin on écrit les dixièmes au premier rang à la droite de la virgule, les centièmes aux deux premiers rangs en mettant d'abord

Digitized by Google

un zéro si le nombre des centièmes n'est exprimé que par un seul chiffre, etc.

Cette règle repose sur une extension du principe fondamental de la numération écrite pour les nombres entiers : *tout chiffre placé à la droite d'un autre chiffre exprime des unités dix fois plus petites que celles exprimées par ce chiffre.*

Dans la pratique on applique les règles suivantes :

1° *Quand la partie entière et la partie décimale sont réunies en un seul nombre*, on écrit le nombre tel qu'il est énoncé ; et l'on place la virgule de manière que le dernier chiffre à droite, occupe le rang qui convient à l'unité décimale auquel il se rapporte ; le dixième est au premier rang, le centième au deuxième, le millième au troisième, etc., etc.

2° *Quand on énonce séparément la partie entière et la partie décimale*, on écrit successivement : 1° la partie entière, 2° la virgule, 3° la partie décimale, de manière que le dernier chiffre à droite soit au rang que doit avoir l'unité décimale énoncée ; s'il n'y a pas assez de chiffres, on écrit entre la virgule et le premier chiffre significatif de la partie décimale, autant de zéros qu'il est nécessaire.

REMARQUES.

26. I. Les chiffres à la droite de la virgule s'appellent *les chiffres décimaux* ou plus simplement les *décimales* du nombre.

27. II. Un nombre décimal ne change pas de valeur quand on écrit des zéros à sa droite ou à sa gauche ; mais on rend un nombre décimal 10, 100... fois plus grand ou plus petit suivant qu'on recule la virgule de 1, 2... rangs vers la droite ou vers la gauche.

On peut aussi rendre un nombre *entier* 10, 100... fois plus petit en séparant, par une virgule, 1, 2... chiffres à sa droite.

28. Pour écrire un nombre complexe, on écrit séparément en chiffres, chaque collection d'unité et puis, en abréviation, le nom de cette unité.

Digitized by Google

Appendice II. — CHAPITRE IV.

Lecture des nombres.

29. Pour lire un nombre entier écrit en chiffres, il y a deux règles.

Première règle. — Quand le nombre se compose tout au plus de quatre chiffres, on lit successivement chaque chiffre significatif en allant de gauche à droite, et l'on ajoute le nom des unités correspondantes[1].

Deuxième règle. — Quand le nombre comprend plus de quatre chiffres, on sépare les unités ternaires par une apostrophe[2], en commençant par la droite (la dernière tranche à gauche peut comprendre moins de trois chiffres) ; ensuite on énonce séparément, en allant de gauche à droite, chaque collection d'unités ternaires en ajoutant le nom de ces collections.

30. Pour les fractions ordinaires, on lit successivement le numérateur puis le dénominateur en ajoutant à celui-ci la terminaison *ième* ; sauf pour les dénominateurs deux, trois et quatre (**15**).

31. Il y a deux règles pour la lecture d'un nombre décimal.

Première règle. — On lit le nombre comme s'il n'y avait pas de virgule, et l'on ajoute le nom de l'unité qui est indiqué par le dernier chiffre à droite.

Deuxième règle. — On nomme séparément la partie entière et la partie décimale.

32. Pour les nombres complexes, on lit successivement et séparément les différentes collections en commençant par les unités de l'ordre le plus élevé.

---

1. L'usage a introduit les expressions suivantes (Dictionnaire de l'Académie française): onze cents, douze cents... pour les nombres 1100, 1200 jusqu'à 1900 ; mais on ne dit pas dix cents pour mille, ni vingt cents pour deux mille, etc.

2. On doit se garder d'employer la virgule pour séparer les nombres entiers en tranches de trois chiffres ; c'est un abus qui offre de sérieux inconvénients.

Digitized by Google

EXERCICES.

1. Quels sont les plus petits nombres de un, deux... chiffres ? Quels sont les plus grands ?

2. Comment trouvera-t-on le nombre des dizaines, des centaines, etc., qu'on peut former avec toutes les unités simples d'un nombre donné ?

3. Combien y a-t-il de nombres de six chiffres ?

4. Un nombre a 15 chiffres ; quel est l'ordre de ses plus hautes unités ?

5. Combien a de chiffres un nombre dont les plus hautes unités sont les centaines de billion ?

6. Soit le nombre 253 ; on intercale un zéro entre les chiffres 5 et 3 ; quel changement le nombre a-t-il subi ?

7. On écrit tous les nombres entiers de 1 à 999 : combien de fois le même chiffre s'est-il reproduit ?

8. Combien de pages renferme un livre dont la pagination a nécessité l'emploi de 10681 caractères ?

9. On écrit la suite naturelle des nombres, sans séparer les chiffres. Combien y a-t-il de caractères écrits si l'on s'arrête d'abord à 99, puis à 999.... ?

10. On écrit la suite naturelle des nombres, sans séparer les chiffres. Cherchez le 75892e chiffre de cette suite. (Note II.)

11. Une loterie se compose de 200 nos ; on ne possède que les nos 0, 1, 2... à 9. Comment doit-on s'y prendre pour faire le tirage ?

12. Démontrez que dans tout nombre entier, une unité d'un ordre quelconque représente une valeur plus grande que le nombre formé par tous les chiffres qui suivent à droite.

13. On forme la suite 1, 2, 3, 5, 8.. . telle qu'un nombre soit la somme des deux précédents ; démontrer qu'il y aura toujours quatre nombres au moins de cette suite, et cinq au plus qui auront le même nombre de chiffres.

14. Pourquoi, dans notre système de numération, dix caractères suffisent-ils pour représenter tous les nombres possibles ?

Digitized by Google

LIVRE II. — CALCUL ET THÉORIE DES NOMBRES.

Introduction.

33. Les usages de la vie nous obligent souvent à ajouter une grandeur à une grandeur ; à prendre la différence de deux grandeurs, etc. On peut obtenir les résultats en faisant abstraction de l'espèce d'unité ou, comme on le dit, en opérant sur les nombres abstraits qui expriment combien il y a d'unités ou de parties aliquotes de l'unité dans les grandeurs dont il s'agit. C'est à ce point de vue qu'on peut dire aussi, d'une manière abrégée, que le nombre entier se compose de une ou plusieurs unités et que le nombre fractionnaire se compose d'une ou de plusieurs parties aliquotes de l'unité.

Composer ou décomposer les nombres s'appelle *calculer*. (Note III.)

34. Il y a *six* calculs fondamentaux : l'addition, la soustraction, la multiplication, l'élévation aux puissances, la division et l'extraction des racines[1].

35. I. L'*addition* est une opération dont le but est de réunir en un seul nombre toutes les unités et parties d'unités contenues dans des nombres donnés.

Le résultat de l'addition s'appelle *somme* ou *total*. Les nombres qu'on additionne sont les *termes*[2] de l'addition ou du résultat.

36. Il résulte de la définition, que l'addition peut servir aussi à *augmenter* un nombre d'autant d'unités ou de parties d'unités qu'il y en a dans un autre nombre.

37. Pour indiquer l'addition on écrit les termes les uns après les autres en interposant le signe $+$; il s'énonce *plus*.

38. II. La *soustraction* est une opération dont le but est de calculer un nombre tel que si on l'additionne avec un nombre donné, on obtienne un autre nombre aussi donné.

---

1. Absolument parlant, il y a une septième opération : la *recherche de l'exposant* ou *l'exponention* (J. M , tome II, page 12); nous ne nous en occuperons pas dans ce traité d'arithmétique élémentaire.

2. Quelques mathématiciens ont proposé le nom d'*addendes*.

Digitized by Google

Le résultat de la soustraction s'appelle *reste*, *excès*, *différence* ou *complément*[1]. Les nombres sur lesquels on opère sont les *termes* de la soustraction ou du résultat. En particulier le terme dont on soustrait est le *nombre supérieur*, et le terme qu'on soustrait est le *nombre inférieur*[2].

39. Il résulte de la définition que la soustraction sert aussi :

1° à calculer l'une des deux parties d'une somme quand on connaît la somme et l'autre partie; envisagée à ce point de vue la soustraction est une décomposition du résultat de l'addition ; 2° à diminuer un nombre d'autant d'unités ou de parties d'unité qu'il y en a dans un autre nombre, etc.

40. Pour indiquer que d'un nombre on doit soustraire un autre nombre, on écrit d'abord le premier, puis le second en interposant le signe — ; il s'énonce *moins*.

41. III. Pour établir une définition rigoureuse et suffisamment claire de la multiplication, il faut convenir de la signification des expressions suivantes :

1° *Prendre un nombre une fois*, c'est prendre le nombre lui-même ; *prendre un nombre deux fois*, c'est faire la somme du nombre augmenté du même nombre ; *prendre un nombre trois fois*, c'est former la somme du nombre augmenté successivement deux fois de suite du même nombre.

2° *Prendre un sixième de fois un nombre* ou plus simplement le sixième d'un nombre, c'est former la *sixième* partie du nombre, c'est-à-dire partager le nombre en *six* parties égales et *prendre une fois* l'une de ces parties.

3° *Prendre cinq sixièmes de fois un nombre* ou plus simplement les cinq sixièmes d'un nombre, c'est prendre *cinq* fois le sixième du nombre.

Cela posé, la *multiplication* est une opération dont le but est de prendre un nombre donné autant de fois que l'indique un autre nombre donné. (Note IV.)

---

1. Le *reste* provient d'une diminution ; l'*excès* se rapporte à la mesure; la *différence* est relative à la comparaison ; le *complément* résulte de la compensation.

2. En latin, le premier s'appelle *major* et le second *minor;* en grec, on a les expressions ἀφαιρετέος et ἀφαιρέτης ; en anglais on a les mots *minuend* et *subtrahend* ou bien les expressions *lower* et *upper number:* pourquoi n'emploierait-on pas en français *minuende* et *subtrahende* (V. Bertrand, *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques,* 1778), ou bien *minuende* et *minuteur* comme le proposait Lhuillier?

Digitized by Google

Le résultat s'appelle *produit*. Le nombre qu'il faut prendre s'appelle le *multiplicande*, et celui qui indique combien de fois il faut le prendre est le *multiplicateur*. On prouvera plus loin que l'on peut échanger entre eux le multiplicande et le multiplicateur ; ils jouent donc le même rôle pour la formation du produit, c'est à cause de cela qu'on les appelle les *facteurs* de la multiplication ou du produit.

42. REMARQUE. — Il est clair que le produit est plus grand ou plus petit que le multiplicande, suivant que le multiplicateur est plus grand ou plus petit que *un*. Quand le multiplicateur est le nombre un, le produit est égal au multiplicande; quand l'un des facteurs est *zéro*, le produit lui-même est *zéro ;* réciproquement pour que le produit de deux facteurs soit *nul*, il faut que l'un des facteurs soit égal à *zéro*.

43. Il résulte de la définition que la multiplication sert aussi :

1° à calculer la somme de nombres égaux ; 2° à rendre un nombre donné autant de fois plus grand qu'il y a d'unités dans un nombre entier donné ; 3° à calculer le prix d'un nombre entier d'objets de même valeur, ou d'une fraction d'objet, connaissant la valeur d'un de ces objets ; 4° à réduire des unités d'une certaine espèce en parties aliquotes d'une de ces unités ; 5° à calculer, en géométrie, les surfaces ; etc., etc.

44. Pour indiquer la multiplication de deux nombres, on place le multiplicateur à gauche du multiplicande et l'on met entre les facteurs le signe × ou un point ; il s'énonce *fois*.

45. IV. Après avoir formé le produit de deux facteurs, on peut encore multiplier le résultat par un troisième facteur ; ensuite le deuxième produit par un quatrième facteur et ainsi de suite : on obtient alors un produit qui est dit *continu*. Les nombres qui servent à former le produit continu sont encore les facteurs de ce produit continu et on les écrit les uns à la suite des autres en séparant deux facteurs consécutifs par le signe de la multiplication.

46. Quand tous les facteurs d'un produit continu sont égaux entre eux, ce produit prend le nom particulier de *puissance*. C'est une *deuxième puissance* si elle est le produit de deux facteurs égaux ; une *troisième puissance* si elle est le produit de trois facteurs égaux et ainsi de suite. Par extension on dit la *première puissance* d'un nombre pour le nombre lui-même. La deuxième puissance s'appelle aussi le *carré* et la troisième

Digitized by Google

puissance, le *cube* ; ces dénominations sont tirées de la géométrie. Le nombre des facteurs de la puissance est le *degré* de la puissance.

Cela posé, *l'élévation aux puissances* est une opération dont le but est de calculer le produit de deux ou de plusieurs facteurs égaux.

47. Pour indiquer une puissance d'une manière abrégée, on écrit à la droite du nombre, un peu au-dessus et en plus petits caractères, le degré de la puissance ; ce degré ainsi indiqué, s'appelle *l'exposant*.

48. V. La *division* est une opération dont le but est, connaissant un produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, de trouver l'autre facteur.

Le résultat de la division, c'est-à-dire le facteur inconnu qu'il faut trouver, s'appelle *quotient* : le facteur donné est le *diviseur* et le produit donné est le *dividende* ; enfin les deux nombres donnés portent le nom général de *termes* de la division.

49. REMARQUE. — Il est clair que le quotient est plus petit ou plus grand que le dividende suivant que le diviseur est, au contraire, plus grand ou plus petit que *un* ; le quotient est égal au dividende si le diviseur est *un*.

50. Il résulte de la définition que la division sert aussi :

1° à calculer un nombre tel que si on le multiplie par un nombre donné, ou s'il multiplie un nombre donné, on obtienne un autre nombre aussi donné ; 2° à trouver combien de fois il faut prendre un nombre pour obtenir un autre nombre donné ; ou comme on le dit quelquefois, combien de fois un nombre est contenu dans un autre ; 3° à partager un nombre en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans un nombre entier donné ; 4° à rendre un nombre autant de fois plus petit qu'il y a d'unités dans un nombre entier donné ; 5° à calculer la valeur d'une unité, connaissant la valeur d'un nombre quelconque d'unités ; 6° à extraire le nombre d'unités entières contenu dans un nombre quelconque de parties aliquotes de l'unité, etc.

51. Pour indiquer la division, on écrit d'abord le dividende puis à droite, sur une même ligne, le diviseur en interposant le signe : [1] ; on l'énonce *divisé par*. On peut aussi écrire le diviseur au-dessous du dividende en les séparant par un trait qu'on énonce

1. Les Anglais emploient le signe ÷.

Digitized by Google

divisé par ou d'une manière abrégée *sur ;* cette forme empruntée à la notation des fractions ordinaires ne peut amener aucune confusion ; on le verra au moyen d'un principe qu'on démontrera plus tard.

52. VI. *L'extraction de la racine* est une opération dont le but est de trouver un nombre tel que si on l'élève à une puissance donnée, on obtienne un nombre donné.

Le résultat est la *racine.* Le nombre qui exprime à quelle puissance il faudrait élever la racine est l'*indice.*

53. Pour indiquer une extraction de racine, on écrit le nombre donné sous le signe $\sqrt{\ }$ qu'on appelle *racine* ou radical ; à la gauche de ce signe et un peu plus haut on met l'indice. Ex. : $\sqrt[2]{36}$, $\sqrt[3]{216}$ signifient respectivement le nombre dont la deuxième puissance est 36, la troisième puissance est 216 ; c'est 6. Quand l'indice est 2, on peut se dispenser de l'écrire.

*
* *

54. Pour tout calcul, il faut considérer *cinq* parties : la définition, la règle, la démonstration, la preuve et les applications. 1° La *définition* indique le but de l'opération ; 2° la *règle* expose la marche à suivre ; 3° la *démonstration* montre que la règle conduit au but proposé ; 4° la *preuve* d'un calcul est une opération par laquelle on s'assure de l'exactitude du calcul ; il est clair que la preuve doit être au moins aussi facile que l'opération qu'elle doit servir à vérifier ; 5° les *applications* sont des questions pour la solution desquelles on doit employer le calcul dont on s'occupe.

55. Un nombre peut être *égal* à un autre nombre, *plus grand* ou *plus petit* que cet autre ; on indique ces relations par les signes

$=$[1] $\qquad > \qquad\qquad <$

qu'on traduit respectivement par

égal à $\qquad$ *plus grand que* $\qquad$ *plus petit que*

on emploie aussi les signes $\geqq$ pour *plus grand* ou *égal*; et $\leqq$ pour *plus petit* ou *égal;* $\neq$ *pas égal à;* $\ngtr$ *pas plus grand que;* $\nless$ *pas plus petit que.*

---

1. Autrefois on se servait, pour désigner l'égalité, du signe $\propto$; on le rencontre encore dans les ouvrages du XVIIIe siècle, comme la géométrie du R. P. Lamy (1710).

Digitized by Google

56. Voici quelques termes qu'on emploie quelquefois dans les mathématiques :

1° L'*axiome* est une vérité évidente par elle-même. Exemples : deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ; le tout est plus grand qu'une de ses parties ; le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé ; quand on augmente ou qu'on diminue deux nombres égaux d'un même nombre, on obtient des résultats égaux, etc.

2° Le *théorème* est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*. Exemples : une unité décimale d'un ordre quelconque est un multiple de 9 plus *un ;* le produit de deux nombres impairs est un nombre impair ; une fraction ne change pas de valeur quand on rend ses deux termes un même nombre de fois plus grands ou plus petits, etc.

Dans l'énoncé d'un théorème on distingue l'*hypothèse* ou la supposition qu'on fait sur un certain sujet et la *thèse* qui est la conclusion ou une conséquence de cette hypothèse et qu'il faut démontrer.

Parmi les théorèmes on distingue le principe et le lemme. Le *principe* est un théorème fondamental servant à établir beaucoup d'autres théorèmes. Le *lemme* ne sert qu'à la démonstration d'un théorème subséquent ou tout au plus d'un petit nombre de théorèmes.

3° La *réciproque d'un théorème* est un autre théorème dans lequel on prend, en tout ou en partie, pour hypothèse la thèse et pour thèse l'hypothèse du premier théorème. Exemple : le deuxième théorème servant d'ex., a pour réciproque, tout nombre impair peut être décomposé en un produit de deux nombres impairs. Toutes les réciproques ne sont pas vraies.

4° Le *corollaire* est une vérité qu'on rattache à un théorème ou à un lemme dont on le déduit facilement. Exemple : la démonstration que tout nombre est divisible par 6 quand il est divisible par 2 et par 3 est un corollaire de ce théorème que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair, etc.

5° Le *problème* est une question qui exige une solution. Exemple : combien y a-t-il d'heures en sept jours ? etc.

Les axiomes, les théorèmes, les principes, les lemmes, les réciproques et les problèmes, s'appellent du nom commun de *propositions ;* on donne aussi le nom de proposition à un énoncé qui n'exprime pas une vérité.

6° Le *scolie*[1] dont le nom vieilli ne s'emploie plus guère, est une remarque ou une observation qu'on fait sur une ou plusieurs propositions tendant à faire apercevoir leur liaison, leur extension et les restrictions s'il y en a.

---

1. Scolie est du féminin quand il est employé pour signifier une note de grammaire ou de critique philologique.

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE. — NOMBRES ENTIERS.

CHAPITRE PREMIER.

Addition.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

57. I. Pour ajouter un nombre à un autre, on peut décomposer le premier en ses diverses parties et ajouter successivement chacune d'elles au deuxième nombre.

II. La somme de deux nombres reste la même, quel que soit l'ordre dans lequel on effectue l'addition.

RÈGLES.

58. Nous supposerons connues : 1° la règle pour additionner un nombre d'un seul chiffre avec un nombre d'un seul chiffre ; 2° la règle pour additionner un nombre quelconque avec un nombre d'un seul chiffre ; 3° la règle pour additionner plusieurs nombres d'un seul chiffre chacun, et nous passons immédiatement à la règle générale suivante :

Pour additionner *des nombres entiers quelconques :* 1° on écrit les termes les uns sous les autres de manière que les unités du même ordre soient dans une même colonne ; 2° on souligne le dernier nombre ; 3° on additionne successivement les nombres contenus dans chaque colonne, en commençant par la première colonne à droite et en allant vers la gauche ; 4° si la somme d'une colonne ne surpasse pas *neuf*, on l'écrit dans la colonne sous le trait ; mais si elle surpasse neuf, on n'écrit que son premier chiffre à droite et l'on retient ses dizaines pour les additionner avec les nombres de la colonne suivante ; toutefois on écrit en entier la somme de la dernière colonne à gauche[1].

Démonstration. — En opérant de cette manière, le résultat renferme évidemment toutes les unités contenues dans les nombres proposés[2].

---

1. On trouvera deux méthodes nouvelles d'addition dans l'ouvrage « *L'addition de* 10000 *chiffres par minute*, par M. Michel Laparte (Bordeaux, 1886). (Note V.)

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Soustraction.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

59. I. Quand on augmente ou qu'on diminue le plus grand terme d'un certain nombre, le reste augmente ou diminue de ce nombre.

II. Au contraire quand on augmente ou qu'on diminue le plus petit terme d'un certain nombre, le reste diminue ou augmente de ce nombre.

III. La différence des deux termes ne change pas quand on les augmente ou qu'on les diminue en même temps d'un même nombre.

IV. Pour soustraire un nombre d'un autre on peut retrancher successivement du second toutes les parties du premier.

On démontrera facilement ces principes.

RÈGLES.

60. Nous supposerons connue la règle pour soustraire un nombre d'un seul chiffre et nous passons immédiatement à la règle générale pour calculer la différence de deux nombres entiers quelconques. Il y a deux méthodes.

61. *Première méthode.* — 1° On écrit le plus petit terme sous le plus grand de manière que les unités du même ordre correspondent ; 2° on souligne le plus petit terme ; 3° on retranche successivement, en commençant par la droite, chaque chiffre appartenant au terme inférieur du chiffre qui est au-dessus, et l'on écrit le reste dans la même colonne, sous le trait; quand les deux chiffres sur lesquels on opère sont égaux, on écrit le reste zéro; enfin quand une des soustractions partielles est impossible, on retranche le chiffre inférieur de 10 et l'on ajoute, au reste, le chiffre supérieur ; on ajoute ensuite *un* au chiffre du nombre inférieur qui est à la gauche de celui qu'on a soustrait.

Démonstration. — On justifie facilement les deux premières parties; quant à la troisième, elle résulte du troisième principe fondamental ; le reste n'est pas altéré car, en opérant comme le dit la règle, les deux termes de la soustraction sont augmentés de 10 unités du même ordre.

Digitized by Google

62. *Deuxième méthode* (par complément)[1]. — Avant d'exposer cette méthode il importe de définir ce qu'on entend par le *complément d'un nombre : c'est ce qu'il faut ajouter au nombre pour obtenir dix unités de son ordre le plus élevé.* Ex. : le complément de 663 ou simplement C. 663 est 337 ; car 663 + 337 = 1000 = 10 centaines.

Il est facile de voir qu'on obtiendra le complément d'un nombre en retranchant, à partir de la gauche, chaque chiffre de *neuf*, à l'exception du dernier chiffre significatif à droite qu'on retranchera de *dix*. Ex. : C. 3470 = 6530.

Cela posé, pour faire une soustraction par complément : 1° on détermine le complément du nombre à soustraire ; 2° on additionne ce complément avec le nombre supérieur ; 3° on retranche de la somme dix unités de l'ordre le plus élevé du nombre à soustraire.

Ex. : 7948 — 3875 ; 7948 + C. 3875 — 10 mille = 7948 + 6125 — 10 mille = 14073 — 10 mille = 4073

Démonstration. — L'opération revient à retrancher 10000 ou 3875 + C. 3875 de 7948 + C. 3875 ; les deux termes sont donc augmentés du C. 3875.

63. Cette méthode peut être utilement employée dans la pratique. Soit à résoudre le problème suivant : *une maison de commerce ayant en caisse* 1250 *fr. reçoit les sommes suivantes :* 3455 *fr.*, 4560 *fr. et* 7800 *fr. ; elle paie successivement* 1065 *fr. et* 725 *fr. Que reste-t-il en caisse ?*

Solution. — Il reste 1250 + 3455 + 4560 + 7800 + 8935 (c. 1065) + 9275 (c. 0725)[2] — 20000 = 15275 fr.

EXERCICES.

1. Combien y a-t-il de nombre de 1, 2, 3. . chiffres ?
2. Démontrez que la somme de deux nombres, ajoutée à leur différence, donne comme résultat le double du plus grand nombre ; et que la somme diminuée de la différence, donne comme résultat le double du plus petit nombre.
3. Le plus grand de deux nombres vaut leur demi-somme plus leur demi-différence ; et le plus petit nombre vaut la demi-somme moins la demi-différence.
4. Que faut-il faire pour rendre égaux deux nombres différents, sans changer la somme des deux nombres.

---

1. Le célèbre géomètre Lagrange recommandait vivement cette méthode dans ses leçons, à l'Ecole normale (*Journal de l'Ecole polytechnique*, tome II).

2. On prend le complément de 0725 pour que le premier chiffre à gauche des nombres à soustraire soit rapporté à la même unité.

Digitized by Google

5. Démontrez que pour ajouter à un nombre la différence de deux autres nombres, il faut ajouter le plus grand de ceux-ci et retrancher, de la somme, le plus petit.

6. Démontrez que si l'on fait la différence entre un nombre de trois chiffres et ce nombre renversé, on trouve 9 pour chiffre du milieu et 9 pour la somme des chiffres extrêmes.

7. Comment peut-on trouver le produit d'un nombre multiplié par 11 ou par 9, sans effectuer la multiplication ?

8. Comment peut-on écrire immédiatement le produit de 12345679 par 9, 18... 81, c'est-à-dire par les multiples de 9 jusqu'à 9 fois 9.

9. La somme des chiffres d'un nombre dont tous les chiffres sont significatifs ne change pas quand on augmente ce nombre de 9. Généralisez.

10. Si l'on augmente de 11 un nombre dont tous les chiffres sont significatifs, la différence entre la somme des chiffres de rangs impairs et celle des chiffres de rangs pairs reste la même. Exprimez une conséquence de ce principe.

CHAPITRE III.

Multiplication.

64. La multiplication par un nombre entier n'est qu'une addition abrégée ; le résultat est dit un *multiple* du multiplicande. On indique, d'une manière générale, un multiple d'un nombre en mettant un point au-dessus du nombre ; c'est ainsi que $\dot{8}$ désigne un multiple de 8[1].

En particulier le produit par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... s'appelle le *double*, le *triple*, le *quadruple*, le *quintuple*, le *sextuple*, le *septuple*, l'*octuple*, le *nonuple*, le *décuple*, etc. ; et l'opération s'appelle *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, etc.

Quand on multiplie un nombre par un nombre entier, on rend le multiplicande *autant de fois plus grand* ; ou l'on prend le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

65. I. Pour multiplier une somme ou une différence par un nombre, on peut multiplier successivement chaque terme par le multiplicateur.

---

1. Cette notation est due à Leibnitz ; quelques auteurs mettent la lettre gothique 𝔄 devant le nombre.

Digitized by Google

II. Pour multiplier un nombre par une somme on peut multiplier séparément le multiplicande par chaque terme de la somme, ensuite additionner les produits partiels.

III. Quand on augmente ou qu'on diminue l'un des facteurs d'un certain nombre d'unités, le produit lui-même est augmenté ou diminué ; et la différence est le résultat qu'on obtient quand on multiplie le nombre des unités par le facteur qui n'a pas changé.

IV. On multiplie deux sommes l'une par l'autre, en multipliant chaque partie de la première somme par chaque partie de la seconde, et en ajoutant ensuite les produits obtenus.

On démontrera facilement ces quatre principes.

66. V. *Le produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

Démonstration. — Soit le produit de 5 par 4 ; il faut démontrer qu'il est égal à celui de 4 par 5. Ecrivons sur une ligne autant d'unités qu'il y en a dans le nombre 5 ; plaçons ensuite autant de ces lignes les unes sous les autres qu'il y a d'unités dans le nombre 4 ; on voit ainsi que le nombre total de ces unités peut être obtenu soit en prenant 4 fois 5, soit en prenant 5 fois 4. (Note VI.)

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

67. VI. Quand le multiplicateur peut être décomposé en un produit de deux facteurs, on obtient aussi le produit en multipliant successivement le multiplicande par chacun des facteurs du multiplicateur.

Démonstration. — 24 est le produit de 6 par 4, et pour multiplier un nombre 7 par exemple, par 24 on multipliera d'abord 7 par 6, puis le résultat par 4 ; en effet, on aura ainsi 4 fois 6 nombres ou 24 nombres égaux à 7.

68. VII. Quand on multiplie l'un des facteurs d'un produit par un nombre entier, le produit devient ce nombre de fois plus grand ; et réciproquement pour obtenir un produit un certain nombre de fois plus grand, il suffit de rendre l'un des facteurs ce nombre de fois plus grand et de conserver l autre facteur. On pourrait établir des principes analogues pour des facteurs un certain nombre de fois plus petits.

Démonstration. — Le produit de 7 par 24 est 4 fois plus grand que celui de 7 par 6, car pour avoir le produit de 7 par 24, on multiplie d'abord 7 par 6 et puis le résultat par 4 ; de même le produit 28 par 6 est 4 fois plus grand que 7 par 6, car 28 par 6 = 6 par 28 et l'on est ramené au cas précédent. La deuxième partie est évidente.

RÈGLES.

69. Nous supposons connue la règle pour multiplier un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre. (Note VII.)

Digitized by Google

70. *Première règle. — Pour multiplier un nombre entier par 10, 100. ., ou bien en général par un nombre formé du chiffre 1 suivi de zéros* : on met à la droite du multiplicande autant de zéros qu'il y en a au multiplicateur.

Démonstration. — Cette règle n'est qu'une application du principe fondamental de la numération écrite.

71. *Deuxième règle. — Pour multiplier un nombre entier de deux ou de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre :* on multiplie successivement par le multiplicateur, en commençant par la droite, chaque chiffre du multiplicande ; on écrit les unités de chaque produit et l'on ajoute les dizaines au produit suivant.

Démonstration. — Cette règle résulte immédiatement de cette remarque que la multiplication par un nombre entier n'est qu'une addition abrégée.

72. *Troisième règle. — Pour multiplier un nombre entier quelconque par un nombre entier composé de deux ou plusieurs chiffres* : 1° on écrit le multiplicateur sous le multiplicande ; 2° on tire un trait sous le multiplicateur ; 3° on multiplie successivement, d'après la deuxième règle, le multiplicande par chaque chiffre significatif du multiplicateur, et l'on écrit les produits partiels les uns sous les autres de manière que le premier chiffre de chacun d'eux soit placé dans la même colonne que le chiffre du multiplicateur qui a donné le produit ; 4° on additionne les produits partiels.

Démonstration. — Soit à multiplier 35084 par 8076 ; c'est prendre 8076 fois 35084 ; or, $8076 = 8000 + 70 + 6$, on prendra donc séparément 8000 fois, 70 fois et 6 fois le multiplicande dans l'ordre qu'on voudra (deuxième princ. fond.), puis on additionnera les produits partiels. Le produit par 6 s'obtiendra au moyen de la deuxième règle et les produits par 8000 et par 70 au moyen de la même règle combinée avec la première et avec le sixième principe fondamental.

REMARQUES.

73. I. Il est d'usage de faire les multiplications partielles en commençant par la droite du multiplicateur, il y a pourtant des cas particuliers où il vaudra mieux suivre un autre ordre. Par exemple soit à multiplier 83725 par 12144 ; on remarquera que $144 = 12 \times 12$; on multipliera d'abord le multiplicande par 12 mille, ce qui donne le produit partiel 1004700 mille ; puis on prend 12 fois 1004700 ce qui fera 12×12 ou 144 fois le multiplicande 83725 et ce qui donne le produit partiel 12056400 unités simples ; enfin l'on additionne.

```
      83725
      12144
  -----------
    1004700
   12056400
  -----------
 1016756400
```

Digitized by Google

74. II. — On peut aussi, quand on est un peu habile, trouver le produit de deux facteurs entiers quelconques sans écrire les produits partiels. Par exemple : soit 328 à multiplier par 647 ; on dit $7 \times 8 = 56$; on écrit le chiffre des unités 6 ; les dizaines du produit sont données par les deux produits 4×8 et 7×2, dont la somme est 46 ; en y joignant 5 pour la retenue, on trouve 51 dizaines ; le chiffre des dizaines est donc 1 ; les centaines sont fournies par les 3 produits 7×3, 4×2 et 6×8 ensemble 77 et 5 de retenue ; on a en tout 82 centaines ; le chiffre des centaines est 2 ; les mille s'obtiennent par $4 \times 3 + 6 \times 2 = 24$ et 8 font 32 ; le chiffre des mille est donc 2 ; les centaines de mille $6 \times 3 = 18$ plus les 3 de retenue donnent 21. On a ainsi le produit demandé qui est 212216 [1].

```
   3 2 8
   6 4 7
 -------
 2 1 2 2 1 6
```

75. *Quatrième règle.* — Si l'un des deux facteurs d'un produit, ou tous les deux ont des zéros à droite, on fait la multiplication sans faire attention aux zéros ; mais après l'opération on écrit à la droite du résultat autant de zéros qu'on en a négligés dans les deux facteurs réunis.

Démonstration. — Par exemple : si l'on néglige *trois* zéros au multiplicande, ce nombre est devenu 1000 fois plus petit et le produit est aussi 1000 fois trop petit (7e princ. fond.); et si l'on néglige deux zéros au multiplicateur, le produit est encore 100 fois plus petit; donc pour avoir le produit exact, il faudra le rendre 1000 fois plus grand, puis 100 fois plus grand, ce qu'on fera en écrivant à sa droite autant de zéros qu'il y en avait dans les deux facteurs réunis.

76. *Méthode abrégée d'Oughtred.* — Quand on est conduit à multiplier entre eux des nombres très grands, il suffit ordinairement de connaître le produit à une unité près d'un ordre donné ; on peut alors opérer comme suit :

1° On écrit le chiffre des unités simples du multiplicateur sous le chiffre du multiplicande qui représente des unités dix fois plus petites que celles qui expriment le degré d'approximation demandé et on écrit les autres chiffres du multiplicateur dans l'ordre inverse de celui où ils sont ; s'il y a alors des chiffres du multiplicateur au-dessus desquels il n'y a pas de chiffres du multiplicande on remplacera les chiffres manquants par des zéros ; 2° on multiplie le multiplicande par chaque chiffre significatif du multiplicateur, en commençant chaque multiplication par le chiffre du multiplicande qui est au-dessus du chiffre du multiplicateur, et en tenant compte des unités du même ordre qui pourraient refluer de la multiplication du chiffre suivant à droite du multiplicande par le chiffre du multiplicateur ; 3° on écrit tous les produits partiels les uns sous les autres, de manière que le dernier chiffre à droite de chacun d'eux se trouve dans une même colonne et on les additionne ; 4° on supprime le dernier chiffre à droite de la somme.

Exemple. — Soit à trouver, à une centaine de mille près, le produit de 7593078 par 583987.

Méthode ordinaire.

```
      7 5 9 3 0 7 8
          5 8 3 9 8 7
      -----------------
          5 3 1 | 5 1 5 4 6
        6 0 7 4 | 4 6 2 4
      6 8 3 3 7 | 7 0 2
    2 2 7 7 9 2 | 3 4
  6 0 7 4 4 6 2 | 4
3 7 9 6 5 3 9 0 |
  4 4 3 4 2 5 8 8 | 4 1 9 8 6
```

Méthode abrégée.

```
      7 5 9 3 0 7 8 0
          7 8 9 3 8 5
      -----------------
    3 7 9 6 5 3 9 0 0
    6 0 7 4 4 6 2 4
    2 2 7 7 9 2 3
      6 8 3 3 7 6
        6 0 7 4 4
          5 3 1 5
  4 4 3 4 2 5 8 8 2
```

1. Cette méthode a été donnée par M. Hilf dans un ouvrage intitulé le *Calcul sans chiffres*, méthode qu'on dit avoir été plus anciennement exposée par le professeur Gunz dans ses leçons orales à Laybach.

Digitized by Google

Pour se rendre compte de cette règle, on remarquera que, grâce à la disposition des facteurs et à la manière d'opérer, les produits partiels de la méthode abrégée expriment tous des dizaines de mille.

Il est bon d'apporter quelquefois une petite modification à cette règle, en calculant deux chiffres de plus qu'il est exigé : mais il n'y a pas lieu d'exposer ici ce détail qui offre peu d'importance. (Note VIII.)

EXERCICES.

1. Démontrez que le produit de deux nombres a autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs, ou autant moins un.

2. Comment peut-on faire le produit de deux nombres en employant, au lieu du multiplicateur, le complément de ce nombre ?

3. Démontrez que le produit diminue quand on augmente le plus grand facteur et qu'on diminue en même temps le plus petit facteur du même nombre *un*.

4. On prend un nombre composé d'autant de chiffres qu'on veut. Cela posé, on ajoute 25 au décuple du premier chiffre à gauche, puis encore le deuxième chiffre à la somme ; on multiplie la somme par 10 et l'on ajoute le troisième chiffre et ainsi de suite. En retranchant 25, 250... suivant que le nombre a 2, 3... chiffres, on aura le nombre primitif.

5. Que devient un produit quand on augmente le premier facteur de 5 unités et qu'on diminue le second de 10 ?

6. Démontrez que le produit de $1008 \times 1009 = 1000 \times 1017 + 72$.

7. Démontrez qu'en multipliant le nombre 12345679 par les multiples de 9 jusqu'à 9×9, on a des produits dont chacun a tous ses chiffres égaux entre eux.

8. Démontrez qu'on peut multiplier un nombre par une différence en multipliant ce nombre par chaque terme de la différence, et en faisant ensuite la différence des deux produits.

CHAPITRE IV.

Produits continus et puissances.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

77. I. La valeur d'un produit continu est indépendante de l'ordre dans lequel on place les facteurs.

Démonstration. — D'abord on peut intervertir l'ordre des deux derniers facteurs à gauche ; ainsi $2 \times 4 \times 3 \times 5 = 4 \times 2 \times 3 \times 5$; en effet $3 \times 5 = 15$ et $4 \times 3 \times 5$ ou 4×15 est le résultat de l'addition $15 + 15 + 15 + 15$; en répétant cette somme deux fois, il vient

$$2 \times 15 + 2 \times 15 + 2 \times 15 + 2 \times 15 = 4 \times 2 \times 15 = 4 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Ensuite, on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques ; ainsi $7 \times 8 \times 9 \times 5 \times 3 \times 13 = 7 \times 8 \times 5 \times 9 \times 3 \times 13$; en effet, $9 \times 5 \times 3 \times 13 = 5 \times 9 \times 3 \times 13$; donc aussi

$$7 \times 8 \times 9 \times 5 \times 3 \times 13 = 7 \times 8 \times 5 \times 9 \times 3 \times 13.$$

Enfin on peut faire passer successivement un facteur quelconque par toutes les places[1].

1. Voir une note de M. J. Saurel (M., année 1885 p. 180).

Digitized by Google

78. II. Pour multiplier un nombre par un produit, on peut multiplier successivement le multiplicande par chacun des facteurs du produit.

Démonstration. — En effet, $12 \times 7 = 7 \times 12 = 7 \times 3 \times 4 = 3 \times 4 \times 7$.

79. III. Pour multiplier un produit continu par un nombre, il suffit de multiplier un des facteurs du produit par ce nombre.

Démonstration. — En effet, soit $5 \times 7 \times 8 \times 9$; les produits $5 \times 7 \times 8 \times 27$, $5 \times 7 \times 24 \times 9$, $5 \times 21 \times 8 \times 9$, $15 \times 7 \times 8 \times 9$ seront 3 fois plus grands que $5 \times 7 \times 8 \times 9$; considérons par exemple le premier
$5 \times 7 \times 8 \times 27 = 27 \times 5 \times 7 \times 8 = 3 \times 9 \times 8 \times 5 \times 7 = 3 \times 5 \times 7 \times 8 \times 9$.

RÈGLES POUR L'ÉLÉVATION AUX PUISSANCES.

80. *Première règle.* — Une puissance de 10 est égale au nombre qu'on forme en écrivant autant de zéros à la droite du chiffre *un*, qu'il y a d'unités dans l'exposant.

Exemple. — $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.

81. *Deuxième règle.* — Pour multiplier entre elles des puissances d'un même nombre, on écrit à la droite du nombre un exposant égal à la somme des exposants et l'on a le produit.

Exemple. — $5^3 \times 5^2 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$.

82. *Troisième règle.* — Pour élever une puissance à une puissance donnée, on multiplie les exposants entre eux.

Exemple. — $(5^2)^3$ [1] $= 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6$.

83. *Quatrième règle.* — Pour élever un produit à une puissance, on élève chaque facteur à cette puissance.

Exemple. — $(3^5 \times 2^3 \times 5^2)^4 = (3^5)^4 \times (2^3)^4 \times (5^2)^4 = 3^{20} \times 2^{12} \times 5^8$.

84. *Cinquième règle.* — Pour élever au carré une somme de deux nombres, on fait le carré du premier, plus le carré du second, plus le double produit du premier par le second.

Démonstration. — Soit le carré de $5 + 4$ qu'on peut indiquer par $(5 + 4)^2$ ou $(5 + 4) \times (5 + 4)$; en multipliant d'abord $5 + 4$ par 5 on a $5^2 + 5 \times 4$; puis en multipliant $5 + 4$ par 4, on a $4 \times 5 + 4^2$; donc le carré $(5 + 4)^2 = 5^2 + 4^2 + 2 \times 5 \times 4$.

De même le carré de la différence de deux nombres se compose de la somme des carrés de deux nombres diminuée du double du produit des deux nombres. (Voir note IX.)

---

1. On met 5^2 dans une parenthèse pour indiquer que le carré 5^2 est supposé effectué.

Digitized by Google

85. *Corollaire.* — La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale à deux fois le plus petit nombre, plus un.

86. *Sixième règle.* — Pour élever au cube une somme de deux nombres, on fait le cube du premier, plus trois fois le produit du carré du premier nombre par le second, plus trois fois le produit du premier par le carré du second, plus le cube du second.

Démonstration. — Soit le cube de $5 + 4$ qu'on peut indiquer par $(5 + 4)^3$ ou $(5 + 4)^2 \times (5 + 4)$; d'abord $(5 + 4)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 4 + 4^2$; en multipliant ce résultat successivement par 5 et par 4 et en additionnant les deux produits on aura enfin $(5 + 4)^3 = 5^3 + 3 \times 5^2 \times 4 + 3 \times 5 \times 4^2 + 4^3$.

87. *Corollaire.* — La différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs est égale à trois fois le carré du plus petit nombre, plus trois fois la valeur du même nombre plus un.

EXERCICES.

1. La différence des carrés de deux nombres consécutifs est 5037 : quels sont ces nombres ?
2. Démontrer que la différence des carrés de deux nombres est égale au produit de la somme des deux nombres par leur différence.
3 Démontrer qu'un nombre ne peut être à la fois un carré et un cube parfait, sans être une sixième puissance exacte
4. Démontrer que si un nombre entier terminé par 5 est un cube parfait, le chiffre des dizaines est 2 ou 7.

CHAPITRE V.

Division.

88. Quand le dividende est un multiple du diviseur, le quotient est un nombre entier et l'on dit que la division *peut se faire exactement* ou plus brièvement que la division est *exacte ;* dans les autres cas le quotient est un nombre fractionnaire et le dividende peut être considéré comme étant égal au produit du diviseur par un nombre entier, qu'on appelle *la partie entière* du quotient, plus un nombre moindre que le diviseur qu'on appelle le *reste* de la division ; autrefois on disait le *résidu.*

Quand on divise un nombre quelconque par un nombre entier on dit *qu'on rend le premier autant de fois plus petit qu'il y a d'unités dans le second.*

Digitized by Google

89. Il est important de se rappeler que, en vertu du principe fondamental de la multiplication, le dividende peut être considéré comme le produit du diviseur par le quotient ou du quotient par le diviseur.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

90. I. Si le dividende et le diviseur deviennent, en même temps, 2, 3... fois plus grands ou plus petits, la partie entière du quotient ne change pas mais le reste devient aussi 2, 3... fois plus grand ou plus petit[1].

Démonstration. — Soit à diviser 25 par 7. le quotient est 3 et le reste 4 ; donc $25 = 7 \times 3 + 4$. Multiplions la somme 25 par 2 ; alors chacune des parties sera multipliée par 2 (**65**) ; d'ailleurs pour multiplier le produit 7×3 par 2, si l'on conserve le facteur 7, il faudra rendre l'autre facteur 3. deux fois plus grand (**68**) ; de sorte qu'on a $50 = 14 \times 3 + 8$; le quotient de 50 : 14 est encore 3, mais le reste est $8 = 2 \times 4$. Même démonstration si l'on divise les deux termes par le même nombre.

II. Pour diviser un produit par un de ses facteurs, il suffit de supprimer ce facteur.

III. Quand le diviseur est le produit de plusieurs facteurs, on peut diviser successivement le dividende par chacun des facteurs du diviseur (Note XI.)

Les deux derniers principes résultent immédiatement des principes fondamentaux de la multiplication, en se rappelant que, d'après la définition même de la division, le dividende est le produit du diviseur par le quotient.

91. IV. Le quotient de la division d'un nombre entier par un nombre entier, c'est-à-dire le facteur par lequel il faut multiplier le diviseur pour obtenir le dividende, est équivalent à la fraction ordinaire qui a le dividende pour numérateur et le diviseur pour dénominateur.

Démonstration. — Démontrons que le quotient 15 : 4 est équivalent à la fraction $\frac{15}{4}$; pour cela nous considérerons d'abord le quotient 1 : 4 ; c'est un nombre 4 fois plus petit que un, car en le multipliant par 4 le produit doit être *un ;* ce quotient est donc équivalent à la fraction $\frac{1}{4}$ qui est le quart de *un ;* ensuite le quotient 15 : 4 vaut 15 fois 1 : 4 et la fraction $\frac{15}{4}$ vaut aussi 15 fois la fraction $\frac{1}{4}$; donc $15 : 4 = \frac{15}{4}$.

C'est en se basant sur ce principe qu'on indique souvent la division par une expression fractionnaire ; on écrit $\frac{15}{4}$ (on dit aussi 15 divisé par 4 ou d'une manière abrégée 15 sur 4) pour 15 : 4[2].

---

1. Quand l'un des deux termes seulement devient 2,3. . fois plus grand ou plus petit, la partie entière du quotient et le reste sont modifiés d'après certaines règles assez compliquées. (Note X.)

2. Cette notation était déjà en usage chez les Grecs. (Hoefer, *Histoire des mathématiques,* p. 268.)

Digitized by Google

RÈGLES.

92. Nous supposons que les élèves connaissent la règle de la division quand le diviseur n'a qu'un seul chiffre et que le dividende est inférieur à *dix* fois le diviseur ; alors le quotient n'a aussi qu'un seul chiffre et on peut le trouver facilement.

93. *Première règle.* — Quand le diviseur se compose d'un seul chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros et que le dividende n'atteint pas *dix* fois le diviseur, on obtiendra la partie entière du quotient en divisant, par le chiffre significatif du diviseur, les unités du même ordre qui sont contenues dans le dividende.

Démonstration. — Soit à chercher la partie entière de 2523 : 300 ; on divise 25 par 3 ; la partie entière du quotient 8 est aussi la partie entière demandée du quotient de 2523 : 300 ; en effet, le produit des 3 centaines du diviseur par le chiffre du quotient est un nombre exact de centaines ; donc il se trouvera dans les 25 centaines du dividende, et en cherchant le plus grand nombre entier par lequel on peut multiplier 3 sans dépasser, c'est-à-dire le quotient entier de 25 : 3, on a aussi la partie entière du quotient de 2523 : 300.

On peut aussi raisonner comme suit :

$$3 \times 8 \leqq 25 < 3 \times 9 ;$$

et il y a au moins une différence d'une unité entre 25 et 3×9 ; multiplions tous les termes par 100, il vient

$$300 \times 8 \leqq 2500 < 300 \times 9 ;$$

il y a maintenant au moins une différence d'une centaine entre 2500 et 300×9 ; donc aussi

$$300 \times 8 < 2523 < 300 \times 9.$$

Il est ainsi démontré que la partie entière du quotient de 25 : 3 est la même que celle du quotient de 2523 : 300.

94. *Deuxième règle.* — Quand le diviseur a plus d'un seul chiffre et que le dividende n'atteint pas dix fois le diviseur, la partie entière du quotient n'a qu'un seul chiffre et l'on peut opérer de deux manières :

Première manière. — On fait une *échelle de division* des neuf premiers multiples du diviseur : le nombre par lequel on a multiplié le diviseur pour obtenir le plus grand multiple qui ne dépasse pas le dividende est la partie entière du quotient.

Deuxième manière. — On divise par le premier chiffre à gauche du diviseur[1] le nombre formé par la partie du même

1. Si l'on sépare sur la droite du dividende et du diviseur le même nombre de chiffres, de manière qu'il reste encore au moins deux chiffres sur la gauche du diviseur, et si l'on divise les parties à gauche l'une par l'autre, on aura le quotient à chercher ou ce quotient plus un. M. Cambier, inspecteur de l'enseignement moyen, a publié dans la *Revue de l'Instruction publique*, (tome XVII, 1874, p. 285), une note à ce sujet ; on la trouvera à la fin de cet ouvrage. (Note XII.)

Digitized by Google

ordre à la gauche du dividende : on multiplie le diviseur par le chiffre obtenu, et si le produit peut être soustrait du dividende, ce chiffre est la partie entière du quotient cherché ; sinon, on le diminue d'une, de deux... unités jusqu'à ce qu'on obtienne un produit qui puisse être soustrait du dividende et alors le dernier chiffre qu'on aura essayé sera le quotient cherché.

Démonstration — Soit à chercher la partie entière de 2523 : 345.

Le dividende 2523 se compose des produits partiels de 3 centaines, 4 dizaines et 5 unités du diviseur par le chiffre du quotient, plus le reste. Le premier de ces produits partiels est un certain nombre de centaines, lesquelles sont nécessairement comprises dans les 25 centaines du dividende ; donc si les 25 centaines ne comprenaient que ce produit, en divisant 25 par 3 on aurait le chiffre exact du quotient ; mais dans les 25 centaines du dividende, il peut y avoir aussi des centaines provenant du produit des 4 dizaines du diviseur par le quotient, donc en divisant les 25 centaines du dividende par les 3 centaines du diviseur, on aura le chiffre cherché ou quelquefois un chiffre trop fort [1].

95. *Troisième règle.* — Quand le diviseur a un ou plusieurs chiffres et que le dividende dépasse dix fois le diviseur, la partie entière du quotient aura plusieurs chiffres et l'on peut la calculer de la manière suivante :

1° On place le diviseur à la droite du dividende [2] avec un trait entre les deux termes ; et l'on souligne le diviseur : c'est sous ce trait qu'on écrira le quotient ; 2° on sépare, sur la gauche du dividende, un nombre qui a autant de chiffres que le diviseur, ou un de plus quand le nombre séparé est moindre que le diviseur ; c'est ce nombre séparé qu'on appelle le *premier dividende partiel* ; 3° on divise le premier dividende partiel par le diviseur en appliquant la première règle, et l'on obtient le premier chiffre à gauche de la partie entière du quotient ; 4° on multiplie le diviseur par ce premier chiffre ; on soustrait le produit du premier dividende partiel ; enfin, à côté du reste, on abaisse le premier chiffre à gauche de la partie du dividende qui n'a pas encore été employée ; on obtient ainsi le nombre qu'on appelle le *deuxième dividende partiel* ; 5° on divise le deuxième dividende partiel par le diviseur, et l'on obtient le deuxième chiffre du quotient qu'on place à la droite du premier ; 6° on opère avec le

1. Dans quelques cas particuliers on peut abréger ces tâtonnements : si le second chiffre du diviseur dépasse 5, on augmente, de un, le premier chiffre avant de faire la division ; et si le second chiffre du diviseur est moindre que 5, on diminue, de un, le chiffre du même ordre au dividende.

2. Les Anglais placent le diviseur à la gauche et le quotient à la droite du dividende.

Digitized by Google

deuxième chiffre du quotient comme on l'a fait avec le premier; et ce jusqu'à ce qu'il n'y ait plus à abaisser de chiffres du dividende; 7° après cela, s'il y a encore un reste, pour avoir le quotient complet c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier le diviseur pour obtenir le dividende, on ajoute au nombre trouvé une fraction qui a pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur.

Quand un des dividendes partiels est plus petit que le diviseur, on écrit 0 au quotient et l'on passe immédiatement au dividende partiel suivant. (Note XIII.)

```
86626 | 27
81    |------
      | 3208 10/27
 56
 54
  226
  216
   10
```

Démonstration. — Soit à diviser 86626 par 27. Il s'agit de trouver le nombre par lequel il faut multiplier le diviseur pour obtenir le dividende 86626; donc le dividende peut être considéré comme la somme des produits partiels du diviseur 27 par chacune des collections d'unités du quotient; et si l'on connaissait séparément chacun de ces produits partiels, l'opération serait ramenée à l'application de la deuxième règle.

On peut déterminer le produit du diviseur par le chiffre des unités de l'ordre le plus élevé du quotient, au moyen des deux principes suivants :

1° Le produit partiel du diviseur par le chiffre des unités de l'ordre le plus élevé du quotient est contenu dans le premier dividende partiel.

2° Ce premier produit partiel est le plus grand multiple du diviseur qui est contenu dans le premier dividende partiel.

Pour démontrer le premier principe, il suffit d'établir que le premier chiffre à gauche du quotient est du même ordre que le premier chiffre à droite du premier dividende partiel; c'est ainsi que, dans l'exemple proposé, le premier chiffre à gauche du quotient sera de l'ordre des mille ; en effet, d'après la méthode qu'on a suivie pour déterminer le premier dividende partiel, on peut écrire :

$$1 \times 27 \leqq 86 < 10 \times 27$$

et il y a au moins une unité de différence entre 86 et 10×27 ; multiplions tous les termes par 1000, c'est-à-dire par le chiffre *un* suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres à la droite du premier dividende partiel ; il vient

$$1000 \times 27 \leqq 86000 < 10000 \times 27 ;$$

il y aura maintenant au moins 1000 unités de différence entre 86000 et 10000×27 de sorte l'inégalité subsistera encore si l'on ajoute 626 (la portée à droite du premier dividende partiel) à 86000 ; on a donc

$$1000 \times 27 \leqq 86626 < 10000 \times 27.$$

Le quotient est compris entre 1000 et 10000, ses unités de l'ordre le plus élevé sont les *mille*, c'est-à-dire les unités du même ordre que celui du premier chiffre à droite du premier dividende partiel ; or, le produit du diviseur par les mille du quotient est composé de mille, donc ce produit sera tout entier compris dans le premier dividende partiel.

Digitized by Google

Démontrons le deuxième principe ; pour cela nous déterminerons le plus grand multiple du diviseur qui est contenu dans le premier dividende partiel ; nous trouvons ainsi que

$$3 \times 27 < 86 < 4 \times 27 ;$$

en faisant les mêmes raisonnements que ci-dessus, nous pourrons écrire

$$3000 \times 27 < 86626 < 4000 \times 27 ;$$

ce qui démontre que le quotient est compris entre 3000 et 4000, et que le chiffre des mille du quotient est 3.

Cela posé, connaissant le premier produit partiel $3 \times 27 = 81$, on le retranchera du premier dividende partiel 86 qui le contient ; on a le reste 5626.

Ce reste est la somme des produits partiels du diviseur par toutes les parties du quotient qu'il faut encore calculer ; il s'agit donc de trouver le nombre par lequel il faut multiplier le diviseur 27, pour obtenir le reste 5626 ; il suffit pour cela, d'après la définition de la division, de diviser ce reste 5626 par le diviseur 27. Pour faire cette nouvelle division tout à fait indépendante de la première, on peut répéter les raisonnements précédents ; seulement comme le deuxième chiffre du quotient est de l'ordre immédiatement inférieur au premier chiffre, on obtiendra immédiatement le deuxième dividende partiel en abaissant à côté du reste 5 qui provient du premier dividende partiel, le chiffre suivant 6 du dividende total.

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffres à abaisser ; il peut se présenter alors *deux* cas. Ou bien, il reste zéro et le nombre obtenu est le nombre par lequel on doit multiplier le diviseur pour reproduire le dividende ; ou bien, il y a un reste différent de zéro et dans tous les cas moindre que le diviseur ; alors le produit du diviseur par le quotient reproduirait le dividende diminué du reste. C'est ce qui arrive pour l'exemple proposé. Dans ce cas aussi le quotient par lequel il faudrait multiplier le diviseur pour obtenir le dividende est fractionnaire car il est compris entre le nombre entier trouvé et le nombre entier qui suit immédiatement.

La fraction qu'il faut ajouter à la partie entière du quotient déjà trouvée *a pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur ;* en effet, dans l'exemple proposé la fraction du quotient doit être telle que multipliée par le diviseur 27 elle donne pour produit le reste 10 ; or la fraction qui multipliée par 27 donne 1 est évidemment $\frac{1}{27}$ et celle qui donnera 10 sera $\frac{10}{27}$.

REMARQUES.

96. I. Dans la pratique, quand le diviseur n'a qu'un seul chiffre, on multiplie généralement le diviseur par le chiffre du quotient en soustrayant simultanément les produits partiels du dividende[1]. De même quand le diviseur n'a qu'un seul chiffre, on peut abréger l'opération en n'écrivant pas les restes successifs.

97. II. La méthode des compléments (**62**) fournit une nouvelle manière pour faire la division (J. M., t. II, p. 295 et Crelle, t. XIII, p 209) ; cette méthode repose sur le principe suivant : *Quand on ajoute au dividende le produit du quotient par le complément du diviseur, la somme est égale au reste précédé du quotient.*

1. Tous les mathématiciens ne sont pas d'accord sur l'utilité de cette simplification. (Mailly, *Principes de la science du calcul*, p. 22.)

Digitized by Google

Démonstration. — Le quotient de 3822 par 583 étant 6 et le reste 324, si l'on multiplie ce quotient 6 par le complément 417 du diviseur 583 et qu'on ajoute le produit 2502 au dividende 3822, la somme est 6324, c'est-à-dire le reste 324 précédé du quotient 6. En effet $3822 = 583 \times 6 + 324$; or $583 \times 6 = 1000 \times 6 - 417 \times 6$; donc $3822 + 417 \times 6 = 1000 \times 6 + 324$.

Cela posé, voici la règle qu'on en déduit.

Pour faire la division de deux nombres entiers (par exemple 7934 567851 : 534897), on dispose l'opération comme à l'ordinaire seulement on écrit au dessus du diviseur le complément de celui-ci. On détermine le premier chiffre du quotient d'après la règle connue, mais ensuite on multiplie ce chiffre par le complément du diviseur et l'on ajoute le produit au premier dividende partiel. On sépare, par une apostrophe, le premier chiffre à la gauche de la somme ; ce sera le premier chiffre du quotient qui est déjà obtenu et la partie à droite de l'apostrophe sera le premier reste. A côté de ce reste on abaisse le chiffre suivant du dividende ; c'est le deuxième dividende partiel sur lequel on opère comme sur le premier et ainsi de suite.

```
                 | 465103
7934567851       | 534897
 465103          |-------
-------          |  14833
1'2585597
 1860412
-------
 4'4460098
  3720824
-------
  8'1809225
   1395309
-------
   3'2045341
    1395309
-------
    3'440650
```

Cette manière d'opérer offre le très grand avantage de supprimer les soustractions, c'est-à-dire les opérations qui sont ordinairement la cause des erreurs ; il peut arriver aussi que le complément est un nombre qui a moins de chiffres que le diviseur et alors les multiplications partielles deviennent plus faciles. (Note XIV.)

98. III. Quand les deux termes ont beaucoup de chiffres, on trouve plus rapidement la partie entière du quotient en opérant comme suit : on supprime à la droite du dividende autant de chiffres moins un qu'il y en a au diviseur ; on divise la partie qui est restée à la gauche du dividende par le diviseur au moyen de la méthode ordinaire ; quand il n'y a plus de chiffres à abaisser, on continue l'opération en supprimant un chiffre à la droite du diviseur (on le souligne), à chaque division partielle ; seulement chaque fois qu'on supprime un chiffre qui n'est pas inférieur à 5, on augmente de un, par la pensée, le chiffre immédiatement à gauche.

Voici une application de ce procédé à la division de 457894065439 par 78563.

MÉTHODE ORDINAIRE.		MÉTHODE ABRÉGÉE.	
457894065439	78563	45789406'5439	78563
650790	5828367	650790	5828367
222866		222866	
657405		65740	
289014		2892	
533353		534	
618759		60	
67818		4	

Si la partie séparée qui reste au dividende est moindre que le diviseur, on supprime aussi au diviseur autant de chiffres qu'il faut pour que le dividende soit divisible par la partie qui reste du diviseur.

Digitized by Google

793065	432 178	95432 | 17
29609		83102
980		
26		
8		

Par exemple, soit la division de 793065432178 par 9543217 ; après avoir supprimé 6 chiffres à la droite du dividende on devrait diviser 793065 par 9543217 ; pour rendre possible la division on supprime les deux derniers chiffres à droite du diviseur et l'on commence l'opération par la division de 793065 par 95432. (Note XV.)

99. *Quatrième règle.* — Quand les deux termes sont terminés à droite par des zéros, on supprime dans chaque terme autant de zéros qu'il y en a dans le terme qui en contient le moins, puis on effectue, comme à l'ordinaire, la division des nombres résultants.

Démonstration. — La suppression des zéros rend en effet les deux termes un même nombre de fois plus petits et la partie entière du quotient conserve sa valeur (**90**). Le quotient complet lui-même, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier le diviseur pour obtenir le dividende ne change pas non plus, car le reste de la division et le diviseur étant divisés par le même nombre, la fraction qui doit être ajoutée à la partie entière du quotient (**95**) conserve la même valeur comme on le démontrera plus tard.

100. *Remarque.* — Si le diviseur seul a des zéros à sa droite, on les néglige et l'on sépare un nombre égal de chiffres sur la droite du dividende ; on divise la partie qui reste à la gauche du dividende par le diviseur dont on a supprimé les zéros ; enfin quand la division est achevée on écrit, à la droite du reste, les chiffres supprimés du dividende : le quotient obtenu et le reste ainsi formé sont le quotient et le reste de la division des nombres proposés.

Démonstration. — Soit à diviser 841972 par 3700 ; on divise 8419 par 37 ; le quotient entier est 227 et le reste 20 ; on en conclut que le quotient 841972 : 3700 est aussi 227, mais que le reste est 2072.

En effet, 1° $37 \times 227 < 8419 < 37 \times 228$ avec au moins une unité de différence entre les deux derniers termes ; donc $3700 \times 227 < 841972 < 3700 \times 228$ avec au moins 100 unités de différence entre les deux derniers termes ; donc aussi $3700 \times 227 < 841972 < 3700 \times 228$, et le quotient de 841972 : 3700 est 227 comme celui de 8419 : 37.

2° $8419 = 37 \times 227 + 20$, d'où $841900 = 3700 \times 227 + 2000$; et $841972 = 3700 \times 227 + 2072$, d'ailleurs $2072 < 3700$ puisque $20 < 37$; donc enfin 2072 est le reste de 841972 : 3700.

EXERCICES.

1. Démontrez que, dans toute division, le dividende est plus grand que le double du reste.

2. Dans quel cas le quotient d'une division reste-t-il le même quand on ajoute une, deux, trois..... unités au diviseur ?

Digitized by Google

3. Le reste de la division ne change pas quand on ajoute au dividende ou quand on en retranche un multiple du diviseur.

4. Une division ayant été effectuée, on la recommence en divisant le dividende par le quotient obtenu. Dans quel cas trouvera-t-on pour quotient et pour reste, dans cette deuxième opération, le diviseur et le reste de la première division ?

5. En ajoutant le dividende à chaque terme d'une division, le quotient devient invariablement *un* et le reste devient la différence des deux termes de la première division.

CHAPITRE VI.

Extraction de la racine.

§ I. — RACINE CARRÉE.

101. Les carrés de

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
sont 1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 ;

donc si un nombre est plus petit que 100, sa racine carrée est plus petite que 10, et pour la trouver il suffit de connaître par cœur les carrés des neuf premiers nombres entiers. Ce tableau montre aussi que parmi les nombres de un et de deux chiffres il n'y en a que 9 dont les racines carrées soient aussi des nombres entiers, les autres ont des racines fractionnaires dont on déterminera facilement la partie entière ; c'est ce qu'on appelle *extraire la racine à une unité près*, ou plus simplement *extraire la racine entière du nombre*.

102. Pour extraire la racine entière d'un nombre entier quelconque :

1° On partage le nombre en tranches de deux chiffres en commençant par la droite ; la dernière tranche peut n'avoir qu'un seul chiffre ; 2° on extrait la racine entière de la dernière tranche à gauche, et l'on obtient le premier chiffre à gauche de la racine demandée ; 3° on retranche le carré de ce premier chiffre de la 1re tranche, et à côté du reste on écrit la tranche qui se trouve à la droite de la 1re ; enfin on sépare, dans le nombre ainsi formé, le premier chiffre à droite ; 4° on divise la partie qui reste à gauche par le double du chiffre déjà trouvé ; le quotient entier sera le deuxième chiffre de la racine demandée ou bien un chiffre trop grand. Pour le savoir, on l'écrit à la droite du double qui a servi de diviseur, et l'on multiplie

Digitized by Google

le nombre ainsi obtenu par le chiffre à essayer : si le produit ne dépasse pas le nombre formé en abaissant la 2me tranche, le chiffre essayé est exact ; sinon on essaie le chiffre après l'avoir diminué de un, deux .... jusqu'à ce qu'on ait un chiffre qui ne soit plus trop grand ; 5° après avoir trouvé le deuxième chiffre de la racine et avoir effectué la soustraction indiquée on abaisse la 3me tranche à côté du reste ; on sépare encore le dernier chiffre à droite et l'on divise la partie qui reste à gauche par le double du nombre qui est formé par les deux premiers chiffres de la racine : la partie entière du quotient est le troisième chiffre de la racine ou un nombre trop grand ; on l'essaie comme le deuxième chiffre ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait opéré sur toutes les tranches du nombre proposé.

Démonstration. — Nous établirons d'abord les deux principes suivants :

1° *Pour trouver les dizaines de la racine carrée d'un nombre entier, il suffit d'extraire, à une unité près, la racine des centaines du nombre.*

En effet, soit le nombre 3549 ; la racine entière des 35 centaines est 5, donc on a :

$$5^2 < 35 < 6^2$$

et il y a certainement une unité de différence entre 35 et 6^2, donc aussi

$$100 \times 5^2 < 3500 < 100.\ 6^2$$

et

$$(50)^2 < 3549 < (60)^2 ;$$

ce qui prouve que la racine entière de 3549 comprend 5 dizaines.

2° *Quand on retranche, d'un nombre entier, le carré des dizaines de la racine entière, et qu'on divise les dizaines de ce reste par le double des dizaines de la racine, on obtient un quotient dont la partie entière est le chiffre des unités simples de la racine ou un chiffre trop fort.* (N. A. M., 1871, p. 87.)

En effet, soit encore le nombre 3549 ; la racine comprend 5 dizaines et un certain nombre d'unités simples ; donc le nombre 3549 doit comprendre le carré des 5 dizaines + deux fois le produit des 5 dizaines par le chiffre des unités simples + le carré de ce chiffre (84). Après avoir soustrait le carré des dizaines il reste encore les deux dernières parties ; mais le produit des dizaines par le chiffre des unités simples est de l'ordre des dizaines, donc ce produit est tout entier contenu dans les dizaines du reste et il sera facile de déduire de cette remarque le principe en question.

Cela posé, soit à extraire, à une unité près, la racine carrée de 119681. Le nombre est plus grand que 100 ; la racine carrée sera donc plus grande que 10, et le nombre des dizaines de la racine est la racine entière des 1196 centaines.

1 1'9 6'8 1	3 4 5
2 9'6	6 4
4 0 8'1	6 8 5
6 5 6	

Le nombre 1196 étant lui-même plus grand que 100, sa racine est plus grande que 10, et l'on trouvera les dizaines de la racine entière de 1196 en extrayant la racine entière des 11 centaines.

Ce nombre 11 est enfin plus petit que 100 et sa racine entière est 3 ; c'est le chiffre des dizaines de la racine carrée de 1196. Le carré des 3 dizaines est 9 centaines ; on les retranche des 11 centaines de 1196, il reste 296. Conformément au deuxième principe on devra diviser les 29 dizaines de ce reste par deux fois le chiffre 3 ce qui fait 6 ; le quotient 4 est le chiffre des unités de la racine de 1196 ou un chiffre trop fort. Mais il est facile de s'assurer que 4 est bien le chiffre exact et pour cela on formera

Digitized by Google

le double produit des dizaines 3 ou 60 par le chiffre 4 des unités + le carré du chiffre 4, ou ce qui est plus simple, on multipliera, par le chiffre 4 des unités, le double des dizaines ou 60 + le chiffre 4 des unités ; ou bien on multipliera le chiffre 4 par le nombre 64 qu'on forme en écrivant le chiffre 4 des unités à côté du double 6 du chiffre des dizaines ; le produit est 256 < 296, donc la racine entière de 1196 est 34.

Reprenons le nombre 119681. Sa racine comprend 34 dizaines et l'excès de 119681 sur le carré des 34 dizaines est 4081, comme il est facile de le voir ; donc si l'on divise les 408 dizaines de ce reste par 68 qui est le double des dizaines de la racine de 119681, on obtiendra le chiffre des unités de cette racine ou un chiffre trop fort ; pour essayer le chiffre 6 du quotient, on opérera comme précédemment : à côté du double 68 de la racine trouvée on écrira le quotient 6 ; ce qui fait 686 et l'on multipliera ce nombre par le quotient 6 ; le produit est 4116 > 4081 ; donc le chiffre 6 est trop grand ; on essaie 5 ; on trouve 685 × 5 = 3425 < 4116, de sorte que 5 est bien le chiffre des unités de la racine carrée de 119681.

Conclusion : 345 est à une unité près la racine carrée de 119681.

REMARQUES.

103. I. Le reste ne peut pas dépasser le double de la racine trouvée (85); si l'on prend un chiffre trop faible on sera donc averti de la faute.

104. II. Quand une des divisions donne un quotient supérieur à 9, on commencera les essais par le nombre 9, car tout chiffre est inférieur à 10.

105. III. Si l'un des dividendes est plus petit que le double de la racine trouvée par lequel il faut diviser, on écrit un 0 à la racine et l'on abaisse la tranche suivante :

Exemple :

56′ 31′ 00′ 16	7504
7 3′1	145
6 00 1′6	15004
0	

106. IV. Quand la racine doit avoir un assez grand nombre de chiffres, on peut employer une méthode abrégée : on détermine, par la méthode ordinaire, plus de la moitié des chiffres de la racine, ou même seulement la moitié, si le nombre total des chiffres est pair, et que le premier chiffre à gauche est égal au moins à 5 ; on obtient ensuite tous les autres chiffres de la manière suivante : on abaisse à côté du dernier reste les tranches non encore employées ; on supprime à la droite de ce nombre autant de chiffres qu'il reste de chiffres de la racine à obtenir ; enfin l'on divise ce nombre par le double de la racine déjà trouvée.

Digitized by Google

Soit, par exemple, à extraire la racine entière de 579467891239 ; la racine devant avoir 7 chiffres, on calcule d'abord, par la méthode ordinaire, les 4 premiers chiffres de la racine, ce qui donne le nombre 2643 ; à côté du reste 4018 on abaisse les tranches non employées ce qui fait 4018891239 et l'on supprime les 3 derniers chiffres à droite parce qu'il y a encore 3 chiffres de la racine à trouver ; puis on divise le nombre résultant 4018891 par le double 5286 de la racine trouvée 2643 ; on obtient ainsi 762 pour la deuxième partie de la racine ; la racine entière demandée est 2643762.

La théorie de cette règle résulte immédiatement de la formule

$$N = a^2 + 2ab + b^2 \text{ d'où } \frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$$ [1]

N étant le nombre proposé, a la première partie et b la deuxième partie de la racine ; on démontre facilement d'ailleurs que $\frac{b^2}{2a}$ est une fraction plus petite que un. (Note XVI.)

EXERCICES.

1. Démontrez qu'un nombre entier ne peut être un carré parfait (un carré d'un nombre entier) si, le chiffre des unités étant 6, le chiffre des dizaines est pair ; ou si, le chiffre des unités étant 1, 4 ou 9, le chiffre des dizaines est impair.

2. Démontrez que le carré d'un nombre impair est un multiple de 8 augmenté d'une unité.

3. Déterminez un nombre entier tel que la somme de ce nombre avec sa racine carrée soit 342.

4. Déterminez deux nombres, sachant que 164025 est le carré de leur somme et 18225 la différence de leurs carrés.

5. A, B, C gagnent chacun une certaine somme par semaine. Le nombre des francs que gagne A, multiplié par celui que gagne B produit 4550 fr. ; le gain de B par celui de C donne 5950 fr. ; enfin celui de A par celui de C produit 5525 fr. — Quel est le gain hebdomadaire de chacun d'eux ?

6. Trois ouvriers ont reçu chacun une certaine somme : si le premier avait gagné moitié plus qu'il n'a gagné en réalité, il aurait gagné à lui seul autant que les deux autres ensemble ; le gain du premier multiplié par celui du deuxième produit 120 fr, et celui du deuxième par celui du troisième produit 80 fr. Quel est le gain de chaque ouvrier ?

---

1. L'extraction des racines ne se trouvant qu'au programme des classes supérieures, on peut employer la notation abrégée par les lettres pour simplifier les raisonnements.

Digitized by Google

§ II. — RACINE CUBIQUE.

107. Les neuf premiers nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ont pour cubes

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 ;

donc si un nombre est plus petit que 1000, sa racine cubique est plus petite que 10.

108. *Règle.* — Pour extraire, à une unité près, la racine cubique d'un nombre entier 1° on le partage en tranches de trois chiffres à partir de la droite : le nombre de ces tranches, dont la première à gauche peut n'avoir qu'un ou deux chiffres, est égal au nombre des chiffres de la racine ; 2° on extrait la racine du plus grand cube entier contenu dans le nombre formé par la première tranche à gauche : on a ainsi le premier chiffre à gauche de la racine ; 3° on forme le cube de ce chiffre, et l'on retranche ce cube du nombre exprimé par la première tranche à gauche ; 4° on abaisse le premier chiffre de la deuxième tranche à la droite du reste et l'on divise le nombre ainsi formé par trois fois le carré du premier chiffre de la racine : la partie entière du quotient de cette division est égale ou supérieure au deuxième chiffre de la racine ; 5° pour essayer ce chiffre, on l'écrit à droite du premier chiffre de la racine, et l'on élève le résultat au cube : si ce cube peut être retranché du nombre formé par les deux premières tranches du nombre dont on extrait la racine cubique, le chiffre essayé est exact ; dans le cas contraire, on essaye de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait trouvé le chiffre exact; 6° le deuxième chiffre de la racine étant trouvé, et le cube du nombre formé par les deux premiers chiffres de cette racine ayant été soustrait du nombre formé par les deux premières tranches, on abaisse, à la droite du reste, le premier chiffre de la troisième tranche ; 7° on divise le nombre ainsi formé par trois fois le carré du nombre exprimé par les deux premiers chiffres de la racine : la partie entière du quotient est égale ou supérieure au troisième chiffre de la racine ; 8° pour essayer ce chiffre, on l'écrit à droite du nombre formé par les deux premiers chiffres de la racine, et l'on élève le résultat au cube : si ce cube peut être retranché du nombre formé par les trois premières tranches, le chiffre essayé est exact ; dans le cas contraire, on essaie de la même manière

Digitized by Google

le chiffre inférieur d'une unité ; 9° on continue ainsi jusqu'à ce que toutes les tranches aient été employées.

L'excès du nombre proposé sur le cube de la racine trouvée est le *reste* de l'opération. Si ce reste est nul, on a la racine exacte du nombre proposé ; dans le cas contraire, on a seulement la partie entière de cette racine, ou sa valeur, par défaut, à moins d'une unité.

Il peut arriver que dans l'une des divisions qu'on exécute pour trouver les différents chiffres de la racine, à partir du deuxième, le quotient entier soit plus grand que 9 ; dans ce cas, on commence les essais par le chiffre 9. Il peut arriver aussi que dans l'une des divisions dont il vient d'être question, le quotient entier soit zéro ; dans ce cas, le chiffre correspondant de la racine est zéro.

Démonstration. — Elle repose sur les deux principes suivants : 1° le nombre des dizaines de la racine cubique d'un entier N $>$ 1000 est égal à la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans le nombre des mille de N ; 2° si l'on retranche d'un entier N le cube des dizaines de sa racine cubique, et qu'on divise le nombre des centaines du reste par trois fois le carré du nombre des dizaines de la racine, le quotient obtenu est égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine.

Le premier de ces principes se démontre comme le premier principe de l'extraction de la racine carrée et le second principe est un corollaire de la formule $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Cela posé, soit à extraire, à moins d'une unité, la racine cubique de 356430592.

TABLEAU DES CALCULS.

356'430'592	709
343	$3 \times 7^2 = 147$ — 709
134305	$3 \times 70^2 = 14700$ — 709
356430592	6381
356400829	4963
Reste 29763	502681
	709
	4524129
	3518767
	356400829

Le nombre proposé étant plus grand que 1000, sa racine cubique est supérieure à 10 ; et, d'après le premier principe, le nombre des dizaines de cette racine est égal à la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans le nombre 356430 mille de 356430592. Il faut donc chercher d'abord la partie entière de $\sqrt[3]{356430}$.

Le nombre 356430 étant lui-même plus grand que 1000, la partie entière de sa racine est égale à la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans le nombre 356 des mille de 356430 ; il faut donc chercher d'abord la partie entière de $\sqrt[3]{356}$.

Digitized by Google

Le nombre 356 étant plus petit que 1000, la partie entière de sa racine cubique n'a qu'un seul chiffre ; or le plus grand cube contenu en 356 est $343 = 7^3$, donc la partie entière de $\sqrt[3]{356}$ est 7.

La racine cubique de 356430 contient donc 7 dizaines ; nous allons chercher le chiffre des unités de cette racine. L'excès de 356 sur 7^3 étant 13, il est évident que si l'on retranche de 356430 le cube de 7 dizaines, c'est-à-dire 343 mille, le reste contiendra 13 mille et 430 unités ; il sera donc 13430. Or, d'après le deuxième principe, si l'on divise le nombre 134 centaines de ce reste, par trois fois le carré du nombre des dizaines de la racine, c'est-à-dire par 3×49 ou 147, le quotient obtenu sera égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine de 356430 ; mais $134 < 147$, cela montre que le chiffre des unités doit être zéro ; on en conclut que 70 est la partie entière de $\sqrt[3]{356430}$.

Revenons maintenant au nombre proposé 356430592. Sa racine cubique contient 70 dizaines ; nous allons chercher le chiffre des unités de cette racine. L'excès de 356430 sur 343000, cube de 70, étant 13430, il est évident que si de 356430592 on retranche le cube de 70 dizaines, c'est-à-dire 343000 mille, le reste contiendra 13430 mille et 592 unités ; il sera donc 13430592. Or, d'après le deuxième principe, si l'on divise le nombre 134305 des centaines de ce reste par trois fois le carré du nombre des dizaines de la racine, c'est-à-dire par 14700, le quotient obtenu 9 est égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine ; donc la partie entière de $\sqrt[3]{356430592}$ est égale ou inférieure à 709. Pour reconnaître si le chiffre des unités est effectivement 9, il faut former le cube de 709, et voir si ce cube peut être soustrait de 356430592. Or $709^3 = 356400829$ et le nombre proposé excède ce cube de 29763 ; on en conclut que 709 est effectivement la partie entière de $\sqrt[3]{356430592}$.

REMARQUES.

109. I. Dans le courant de l'opération on est conduit à soustraire successivement du nombre proposé le cube de la partie déjà trouvée de la racine ; cette opération est assez longue et peut être simplifiée de la manière suivante.

Soit à soustraire 709^3 du nombre proposé ; représentons les 70 dizaines par a et les 9 unités par b ; on a

$$709^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\,ab^2 + b^3\ ;$$

a^3 ou le cube des 70 dizaines a déjà été retranché ; on a obtenu pour reste 13430592 ; il faut encore soustraire

$$3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3 \text{ ou } b\,(3\,a^2 + 3\,ab + b^2).$$

En remarquant que $3a^2$ exprime des centaines, $3ab$ des dizaines et b^2 des unités simples, on pourra disposer les opérations comme suit

$$\begin{array}{rcl} 3a^2 = 3 \times 70^2 = & & 14700 \\ 3ab = (3 \times 70) \times 9 = & & 1890 \\ b^2 = & 9^2 & 81 \\ \hline & & 1488981 \times 9 = 13400829\,; \end{array}$$

Digitized by Google

en retranchant 13400829 du premier reste 13430592, on obtient le reste 29763 qu'on avait trouvé déjà en soustrayant directement 709^3 du nombre proposé.

110. II. Le reste auquel conduit l'extraction, à moins d'une unité, de la racine cubique d'un entier est moindre que trois fois le carré de la racine, plus trois fois cette racine, plus un (**87**).

111. III. Quand la racine doit avoir un assez grand nombre de chiffres, on peut employer la méthode abrégée suivante : après avoir déterminé plus de la moitié des chiffres de la racine et avoir soustrait le cube du nombre trouvé a, on divise le reste par trois fois le carré du nombre a : la partie entière du quotient sera le nombre qu'il faudra écrire encore à la droite du nombre a pour avoir la partie entière de la racine demandée.

Cette règle est une conséquence de la formule $\frac{N - a^3}{3a^2} = b + \frac{3ab^2 + b^3}{3a^2}$ pour laquelle on démontre facilement que $3a^2 > 3ab^2 + b^3$, si $a > b$. (Note XVII.)

EXERCICES.

1. Un nombre est tel qu'en le multipliant par 2, par 7 et par 11, on a trois nouveaux nombres dont le produit est 22927058. Quel est ce nombre ?
2. Sans faire le calcul d'après la règle ordinaire, dire immédiatement la racine cubique de 148877, sachant que ce nombre est un cube parfait.
3. A l'inspection du dernier chiffre à droite d'un nombre, peut-on reconnaitre s'il est ou n'est pas un cube parfait ?
4. Trouver trois nombres entiers consécutifs, connaissant leur produit. Application à 140556.
5. Trouver un nombre connaissant la différence entre son cube et son carré. Application à 355898148.
6. Démontrer qu'un nombre entier ne peut être un cube parfait, si le chiffre des unités étant 2 ou 6, le chiffre des dizaines est impair.

CHAPITRE VII.

Divisibilité.

§ I. — NOMBRES PREMIERS.

112. Lorsque la division d'un nombre par un autre donne le reste *zéro*, on dit que le premier est divisible par le second ou qu'il est un *multiple* du second ; en effet il se forme du second en multipliant celui-ci par un nombre entier ; on dit

Digitized by Google

aussi que le second divise le premier ou qu'il est un *diviseur*, un *facteur*, un *sous-multiple* ou une *partie aliquote* du premier.

113. Tout nombre est divisible par lui-même et par *un* ; quand il n'a pas d'autre diviseur, il est *premier*.

CONSTRUCTION D'UNE TABLE DE NOMBRES PREMIERS (Méthode du *crible d'Eratosthène*).

114. Pour construire une table des nombres premiers jusqu'à une limite donnée, on écrit sur une première ligne, dans leur ordre naturel, les neuf premiers nombres entiers ; puis, sur la deuxième ligne, les nombres de 10 à 19 ; sur la troisième ligne, les nombres de 20 à 29, etc... Pour ne pas devoir écrire les nombres avec tous les chiffres, on fera usage d'une table ayant 10 colonnes : sur la première ligne se trouvent les 9 premiers nombres dans l'ordre successif ; et dans la première colonne on lit successivement les dizaines 10, 20, 30. . 90. Une case vide sera considérée comme si elle contenait les dizaines et les unités qui correspondent à cette case.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	/	13	/	/	/	17	/	19
20	/	/	23	/	/	/	/	/	29
30	31	/	/	/	/	/	37	/	/
40	41	/	43	/	/	/	47	/	/
50	/	/	53	/	/	/	/	/	59
60	61	/	/	/	/	/	67	/	/
70	71	/	73	/	/	/	/	/	79
80	/	/	83	/	/	/	/	/	89
90	/	/	/	/	/	/	97	/	/
100	101	/	103	/	/	/	107	/	109
110	/	/	113	/	/	/	/	/	/
120	/	/	/	/	/	/	127	/	/

Digitized by Google

Alors on supprime tous les nombres de 2 en 2 à partir de 2^2 ou 4; puis de 3 en 3 à partir de 3^2 ou 9; de 5 en 5 à partir de 5^2 ou 25 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne au nombre premier dont le carré n'est pas inférieur au nombre avec lequel la table doit finir : tous les nombres non supprimés seront des nombres premiers.

Démonstration. — Les nombres 1, 2, 3, sont premiers ; en supprimant, à partir de 2^2 ou 4, les nombres de 2 en 2, on fait disparaitre les multiples de 2 c'est-à-dire les nombres divisibles par 2 ; alors on supprime les nombres de 3 en 3, c'est-à-dire les nombres divisibles par 3 ; mais 2×3 étant déjà supprimé on n'aura a supprimer qu'à partir de 3^2 ou 3×3 et alors il n'y a plus de nombres divisibles par 2 ou 3 ; il n'y a plus non plus de nombres divisibles par 4 ; car tout nombre divisible par 4 est la somme d'un certain nombre de fois 4 ; or, 4 est divisible par 2, donc la somme d'un certain nombre de fois 4 est aussi divisible par 2 ; d'ailleurs tous les nombres divisibles par 2 sont déjà supprimés, et ainsi de suite. Par exemple quand on a supprimé tous les multiples de 7 il ne reste plus de nombres avec des diviseurs jusqu'à 11^2, car on a déjà supprimé tous les multiples plus petits que 11^2 (Note XVII).

115. *Pour vérifier si un nombre donné est premier*, on opèrera comme suit : on essaie la division par tous les nombres premiers successifs en commençant par 2 ; si l'une de ces divisions peut se faire le nombre n'est pas premier ; sinon on pourra arrêter les essais aussitôt qu'on obtient un quotient plus petit que le diviseur essayé ; car dans ce cas le nombre proposé est premier (N. A. M., année 1871, p. 104).

Ex. 1° Voyons si le nombre 527 est premier : On divise successivement 527 par les nombres premiers, 1, 2, 3, 5... en commençant par 2 ; on trouve que 527 est divisible par 17 ; donc 527 n'est pas un nombre premier.

2° Voyons si 789 est un nombre premier : jusqu'à 23 il n'y a pas de nombre premier qui divise 789 ; et quand on divise 789 par le nombre premier suivant 29, on obtient le quotient 27 plus encore un reste ; dès lors il est certain que 789 est un nombre premier ; car si cela n'était pas, il serait divisible par un nombre premier plus grand que 29 et le quotient correspondant qui serait plus petit que 27 diviserait aussi 789 ; cela est impossible puisque aucun nombre plus petit que 29 ne peut diviser 789, comme les essais l'ont prouvé.

EXERCICES.

1. Parmi les nombres suivants indiquez ceux qui sont premiers :

437,	581,	649,	763,	851,	973,	1001 ;
443,	577,	659,	701,	823,	937,	1003 ;
469,	599,	671,	757,	847,	919,	2311 ;

2. Trouvez, dans la suite naturelle des nombres, 11 nombres consécutifs non premiers.

3. Démontrez que tout nombre premier excepté 2 et 3, est de la forme $6n \pm 1$. La réciproque est-elle vraie ?

Digitized by Google

§ II. — Diviseurs communs.

116. *Un diviseur commun* de deux ou de plusieurs nombres est un nombre qui peut diviser séparément chacun des nombres proposés ; le *plus grand commun diviseur* (p. g. c. d.) de deux ou plusieurs nombres est le plus grand de leurs diviseurs communs.

Quand le p g. c. d. est *un*, les nombres sont *premiers entre eux*.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

117. I. — Tout nombre premier qui ne divise pas un nombre est premier avec celui-ci.

Tout nombre premier n'est divisible que par lui-même ou par *un*, donc s'il ne divise pas l'autre nombre, le diviseur commun est un.

118. II. — Deux ou plusieurs nombres premiers sont premiers entre eux.

Ils n'ont en effet d'autre diviseur commun que un.

119. III. — Un diviseur de deux ou de plusieurs nombres est aussi un diviseur de leur somme ou de la différence de deux quelconques de ces nombres.

Chaque nombre se compose d'un multiple du diviseur et dès lors la somme et la différence sont aussi des multiples du diviseur.

La réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie ; en effet, si nous supposons qu'en divisant les deux termes d'une addition par un nombre on obtienne deux restes dont la somme est égale au diviseur, alors la somme est aussi divisible par le diviseur ; de même, si en divisant les deux termes d'une soustraction par un même nombre, on obtient deux restes égaux, le résultat de la soustraction, sera aussi divisible par le diviseur ; il est donc bien démontré que si la somme ou la différence de deux nombres est divisible par un diviseur, chaque terme à part de la somme ou de la différence n'est pas nécessairement divisible par le diviseur.

120. IV. — Un diviseur d'un nombre est aussi un diviseur de ses multiples.

Le multiple d'un nombre n'est que la somme de plusieurs fois ce nombre.

121. V. — Quand un nombre est un diviseur d'un autre nombre, chacune des parties aliquotes du premier est aussi un diviseur du second.

En effet, le second est un multiple du premier, qui est lui-même un multiple de chacune de ses parties aliquotes, donc le second est un multiple de cette partie aliquote.

122. VI. — Quand un nombre n'est pas diviseur d'un autre, un multiple du premier ne divise pas non plus le second, car sinon le premier devrait diviser le second.

Digitized by Google

123. VII. — Quand une somme peut être décomposée en deux parties dont l'une est divisible par un certain nombre, la somme et l'autre partie donnent le même reste quand on les divise par ce certain nombre.

En effet la somme se compose de la première partie qui est un multiple du nombre considéré et de la deuxième partie qui est aussi un multiple du même nombre plus un reste plus petit que ce nombre ; donc la somme des deux parties comprend aussi un multiple du nombre plus le même reste.

124. VIII. — Quand deux nombres ont un diviseur commun, le reste de la division du plus grand par le plus petit est aussi divisible par le diviseur commun et réciproquement tout nombre qui divise le plus petit et le reste doit aussi diviser le plus grand.

En effet, 1° le reste de la division est la différence entre le dividende et le produit du diviseur par le quotient ; donc tout nombre qui divise le dividende et le diviseur et par conséquent le produit du diviseur par le quotient (**120**) divise le reste (**119**) ; 2° le dividende est la somme du reste avec le produit du diviseur par le quotient, donc tout nombre qui divise le reste et le diviseur et par conséquent le produit du diviseur par le quotient (**120**) divise aussi le dividende (**119**).

125. IX. — Quand le plus grand A de deux nombres A et B est divisible par le plus petit B, c'est celui-ci qui est le p. g. c. d. des deux nombres.

Car le p. g. c. d. ne peut pas dépasser le plus petit puisqu'il doit pouvoir le diviser ; or, le plus grand nombre qui puisse diviser B c'est B lui-même ; donc si B divise A, B est le p. g. c. d. de A et de B.

126. X. — Le p. g. c. d. de deux nombres est le même que celui du plus petit et du reste qu'on obtient en divisant le plus grand par le plus petit.

Car si l'on fait un tableau des diviseurs communs des deux nombres puis un tableau des diviseurs communs du plus petit nombre et du reste, on verra que ces deux tableaux seront les mêmes ; en effet tout diviseur du premier tableau doit se trouver parmi les diviseurs du second et réciproquement tout diviseur du second tableau doit se trouver parmi les diviseurs du premier.

Règles pour le calcul du p. g. c. d.

127. *Première règle.* — Pour trouver le p. g. c. d. de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit ; quand le reste est nul, le plus petit nombre est le p. g. c. d. ; si cela n'a pas lieu on divise le plus petit par le premier reste ; s'il y a encore un reste, on divise le premier reste par le deuxième ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne pour reste 0 ; le dernier diviseur est le p. g. c. d. cherché.

Digitized by Google

Soit à calculer le p. g. c. d. de 362 et 84 ; dans la pratique on dispose les calculs de la manière suivante :

	4	3	4	3
362	84	26	6	2
26	6	2	0	

En effet, si 362 était divisible par le nombre 84, celui-ci serait le p. g. c. d. (**125**) ; il y a un reste 26 ; donc 84 n'est pas le p. g. c d. ; or, le p. g. c. d. de 362 et de 84 est le même que celui de 84 et du reste 25 (**126**) et l'on pourra raisonner pour 84 et 26 comme on l'a fait pour 362 et 84 ; et ainsi de suite. Quand on divise 6 par 2 on obtient le reste 0 ; donc 2 est le p. g. c. d. de 6 et 2, de 26 et 6, de 84 et 26, enfin de 362 et 84.

REMARQUES.

128. I. — Les restes des divisions successives devenant de plus en plus petits, on finira nécessairement par obtenir le reste 0. (Note XIX.)

129. II. — Si l'une des divisions donne le reste *un*, les deux nombres proposés sont premiers entre eux ; il en est de même si l'un des restes est un nombre premier qui ne divise pas le diviseur qui a donné ce reste.

130. III. — Quand un des restes est plus grand que la moitié du diviseur, on abrège les calculs en prenant pour le diviseur de la division, au lieu du reste lui-même, l'excès du diviseur sur le reste.

Par exemple, soit à trouver le p. g. c. d. de 372 et 48 ; on divise 372 par 48 ; le reste est $36 > \frac{48}{2}$; on prendra $48 - 36 = 12$ pour le diviseur suivant et l'on divisera 48 par 12 ; on trouve ainsi de suite que 12 est le p. g. c. d. En effet, $372 = 7 \times 48 + 36 = 8 \times 48 - 12$, et l'on démontre facilement que le p. g. c. d. de 372 et 48 est le même que celui de 48 et 12.

131. IV. — Un commun diviseur de deux nombres est aussi un diviseur de leur p. g. c. d. (**120**) ; réciproquement, tout diviseur du p. g. c. d. de deux nombres est aussi un diviseur commun de ceux-ci.

132. V. — Quand on multiplie deux nombres par un troisième, ou qu'on les divise par un de leurs diviseurs communs, le p. g. c. d. est aussi multiplié ou divisé par le troisième nombre (**90**). De là résulte immédiatement que si l'on divise deux nombres successivement par leur p. g. c. d., les deux quotients sont premiers entre eux, car leur p. g. c. d. devient *un*.

133. *Application.* — Quand les deux nombres dont on doit chercher le p. g. c. d. ont visiblement un diviseur commun, on divise les deux nombres par ce diviseur commun ; puis on

Digitized by Google

cherche le p. g. c. d. des deux quotients ; enfin on multiplie ce p. g. c. d. par le diviseur commun qui a été supprimé.

134. *Deuxième règle.* — Pour déterminer le p. g. c. d. de plus de deux nombres, on cherche le p. g. c. d. de deux de ces nombres, puis le p. g. c. d. du résultat obtenu et d'un troisième nombre parmi les nombres proposés; puis le p. g. c. d. du nouveau résultat et d'un quatrième nombre et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres : le dernier résultat est le p. g. c. d. des nombres proposés.

En effet, soient les nombres A, B, C, D; soit d le p. g. c. d. de A et B ; d' de d et C ; d'' de d' et D : je dis que d'' est le p. g c. d. de A, B, C, D. D'abord, tout diviseur commun de A, B, C, D est un diviseur de d'' (**131**) et tout diviseur de d'' est un diviseur commun de A, B, C, D (**120**); or le p. g. d. de d'' est d'', donc aussi d'' est le p. g. c. d. de A, B, C et D.

REMARQUES.

135. I. — Dans la pratique, il est utile de ranger les nombres dans l'ordre *croissant* de grandeur, et de commencer les recherches par les deux plus petits nombres.

136. II. — Comme lorsqu'il s'agit de deux nombres, tout diviseur commun de plusieurs nombres est un diviseur de leur p. g. c. d.; quand on multiplie ou qu'on divise des nombres par un même nombre, le p. g. c. d. est aussi multiplié ou divisé par ce nombre ; quand on divise des nombres par leur p. g. c. d., les quotients sont premiers entre eux.

EXERCICES.

I. Déterminez le p. g. c. d. des nombres suivants :

20680 et 20400 ;
195, 325 et 507 ;
880, 1360 et 12592 ;
6552, 8008, 9009 et 10296 ;
3510, 4714, 8190 et 12285 ;
4032, 3024, 2688, 3360 et 3528.

II. Trouvez deux nombres connaissant leur somme et leur p. g. c. d.

III. Démontrez les principes suivants :

1. Le p. g. c. d. de deux nombres est le même que celui de leur différence et de l'un de ces nombres.

2. Le p. g. c. d. de trois nombres A, B, C est le même que celui de R, R', C, si R et R' sont les restes des divisions de A et B par C.

3. Deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

Digitized by Google

§ III. — CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ.

137. Les caractères de divisibilité sont des règles qui permettent de reconnaître qu'un nombre est divisible par un autre, sans qu'on soit obligé de diviser le premier par le second.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

138. I. — Quand un nombre entier est décomposé en deux parties et qu'on divise la somme et la seconde partie par un sous-multiple de la première partie, les deux divisions donnent le même reste (**123**) ; de là résulte que la condition *nécessaire* et *suffisante* pour que la somme soit divisible par le sous-multiple de la première partie, c'est que la seconde partie soit divisible par le même nombre.

139. II. — Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un des facteurs, est un diviseur de l'autre facteur.

Démonstration. — Soit le produit $P = A \times B$ divisible par un nombre D premier avec A ; je dis que B doit être divisible par D ; car le p. g. c. d. de A et D est 1, donc le p. g. c. d. de $A \times B$ ou P et $D \times B$ est B (**132**) ; or, D divise P et $D \times B$, donc aussi D divise B (**131**).

140. III. — Tout nombre *premier* qui divise un produit de facteurs, est nécessairement un diviseur de l'un des facteurs du produit.

Démonstration. — Soit le produit $P = A \times B \times C$... divisible par le nombre premier D ; on peut considérer P comme le produit de deux facteurs $A \times (B . C . D ...)$; si D divise A le théorème est démontré ; mais si le nombre premier D ne divise pas A il est premier avec A (**117**) et comme il divise le produit des deux facteurs A et B . C . D . ... il doit diviser le produit B . C . D . .., et ainsi de suite ; on prouvera facilement que D doit diviser l'un des facteurs.

141. IV. — Il résulte aussi immédiatement de ce principe que : 1° un produit de facteurs premiers n'est divisible que par l'un de ses facteurs ; 2° tout nombre qui divise une puissance d'un nombre est aussi un diviseur de la racine ; 3° si deux nombres sont premiers entre eux, les puissances de ces nombres sont aussi premières entre elles ; 4° tout nombre qui est premier avec chacun des facteurs d'un produit est aussi premier avec le produit ; et réciproquement, tout nombre qui est premier avec un produit doit être premier avec chacun des facteurs. (Note XX.)

142. V. — Quand un nombre est divisible séparément par des nombres qui, deux à deux, sont premiers entre eux, il est aussi divisible par leur produit.

Digitized by Google

Démonstration. — Soit N un nombre divisible séparément par les nombres A, B, C... premiers entre eux ; puisque N est divisible par A on peut écrire $N = A . Q$, Q étant le quotient de N : A ; or N, donc $A \times Q$ est un multiple de B premier avec A, de sorte que B divise Q ; on peut écrire $Q = B \times Q'$ et $N = A \times B \times Q'$, ce qui prouve que N est divisible par $A \times B$ et ainsi de suite.

143. VI. — Si D est un nombre premier qui ne divise pas N, ce nombre divise exactement la puissance $(D-1)^e$ de N diminuée de un (théorème de Fermat).

Démonstration. — Considérons les nombres 1, 2, 3,... D — 1 inférieurs à D ; ils sont tous premiers avec D, donc aussi les produits N, 2N, 3N,... (D — 1) N sont premiers avec D (**141**, 4°) et si on les divise successivement par D on aura des restes différents ; en effet, supposons que deux de ces nombres mN et nN donnent le même reste r, alors la différence mN — nN ou N ($m - n$) serait divisible par D (**119**) ; ce qui est absurde puisque D est premier avec N et D ne peut diviser $m - n$ car $m - n < D$; par conséquent il y a D — 1 restes différents et inférieurs à D, et ces restes seront les D — 1 nombres 1, 2... D — 1 dans un ordre qui importe peu ; de là résulte que

$$N = \dot{D} + r_1,\ 2N = \dot{D} + r_2, \ldots\ (D-1)\,N = \dot{D} + r_{D-1},$$

d'où $$N \times 2N \times 3N \ldots \times (D-1)\,N, \quad \text{ou}$$

$$[1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (D-1)]\,N^{D-1} = \dot{D} + r_1 \times r_2 \times r_3 \times \ldots r_{D-1} = \dot{D} + 1.2.3\,..(D-1);$$

donc enfin $$[1 \times 2 \times 3 \times \ldots (D-1)]\,(N^{D-1} - 1) = \dot{D}.$$

Or D est premier avec le premier facteur donc il divisera le second facteur $N^{D-1} - 1$.

Divisibilité par 2.

144. Tout nombre entier peut être décomposé en un multiple de 2 plus le chiffre des unités simples ; il résulte de là qu'un nombre est divisible par 2 quand le premier chiffre à droite est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Car ce nombre se compose d'un certain nombre de dizaines, donc d'un multiple de 10 et par conséquent de 2, plus le nombre des unités simples.

REMARQUES.

145. I. - Quand on divise un nombre par 2, on ne peut obtenir que le reste *zéro* ou *un*.

146. II. — Un nombre est dit *pair* s'il est divisible par *deux* : il est *impair* dans le cas contraire : tous les nombres $\dot{10} \pm 2$ ou $\dot{10} \pm 4$ ont pour premier chiffre à droite 0, 2, 4, 6 = 10 — 4 ou 8 = 10—2 donc ils sont pairs ; les nombres $\dot{10} \pm 1$, $\dot{10} \pm 3$, $\dot{10} \pm 5$ ont pour premier chiffre à droite 1, 3, 5, 7 = 10 — 3 ou 9 = 10—1 donc ils sont impairs.

Digitized by Google

147. III. — Un nombre pair est un multiple de 2, d'où la forme générale 2 K ; et un nombre impair est un multiple de 2 plus un, d'où la forme générale 2 K + 1.

Divisibilité par 5.

148. Tout nombre entier peut être décomposé en un multiple de 5 plus le chiffre des unités simples ; il résulte de là qu'un nombre est divisible par 5 quand le premier chiffre à droite est 0 ou 5.

Même démonstration que pour 2.

149. REMARQUE. — Quand un nombre n'est pas divisible par 5, on ne peut obtenir que les restes 1, 2, 3 = 5 — 2 ou 4 = 5 — 1 ; on voit qu'un nombre entier est $\dot{5}$ ou $\dot{5} \pm 1$ ou $\dot{5} \pm 2$; le carré d'un nombre entier est toujours $\dot{5}$ ou 5 ± 1 (à dém.).

Divisibilité par 4 *ou* 25.

150. Tout nombre entier est un multiple de 4 ou 25 plus la tranche des *deux* premiers chiffres à droite ; il résulte de là qu'un nombre entier est divisible par 4 ou par 25 si la tranche des deux premiers chiffres à droite est divisible par 4 ou 25, ou bien si elle se compose de deux zéros.

Pour la démonstration on décompose le nombre en ses centaines plus la tranche des deux premiers chiffres à droite.

151. REMARQUE. — Quand un nombre entier n'est pas divisible par 4 ou par 25, le reste est le même que celui qu'on obtient quand on divise la tranche des deux premiers chiffres à droite par 4 ou par 25.

Divisibilité par 8 *ou* 125.

152. Tout nombre entier est un multiple de 8 ou 125 plus la tranche des *trois* premiers chiffres à droite ; il résulte de là qu'un nombre entier est divisible par 8 ou par 125, si la tranche des trois premiers chiffres à droite est divisible par 8 ou par 125 ; ou bien si elle se compose de trois zéros.

Pour la démonstration on décompose le nombre en ses mille plus la tranche des trois premiers chiffres à droite.

153. REMARQUE. — Quand un nombre entier n'est pas divisible par 8 ou par 125, le reste est le même que celui qu'on obtient en divisant la tranche des trois premiers chiffres à droite par 8 ou par 125.

Digitized by Google

Divisibilité par 3 *ou par* 9.

154. Tout nombre entier est un multiple de 3 ou de 9 plus la somme de la valeur absolue des chiffres ; il résulte de là qu'un nombre entier est divisible par 3 ou par 9 si la somme de la valeur absolue des chiffres est divisible par 3 ou par 9.

Démonstration. — $10 = \dot{9} + 1$ ou $10 = \dot{3} + 1$, donc $10^2 = 10 . \dot{9} + 10 = \dot{9} + 1 = \dot{3} + 1$ et ainsi de suite : une unité d'un ordre quelconque est un multiple de 3 ou de 9 plus un ; donc aussi une collection d'unités d'un certain ordre est un multiple de 3 ou de 9 plus le chiffre significatif de cette collection ; enfin un nombre quelconque qui est la somme de ses collections d'unités peut être considéré comme un multiple de 3 ou de 9 plus la somme de la valeur absolue des chiffres.

155. REMARQUE. — Quand un nombre entier n'est pas divisible par 3 ou par 9 le reste est le même que lorsqu'on divise, par 3 ou par 9, la somme de la valeur absolue des chiffres. Dans la pratique, on prend la somme des chiffres significatifs chaque fois qu'un résultat dépasse 3 ou 9, et l'on ne compte pas le chiffre 3 ou 9. Par exemple, doit-on obtenir le reste de 35479857 : 9, on dit successivement, en commençant par la gauche

$3 + 5 = 8$; $8 + 4 = 12$ et $1 + 2 = 3$; $3 + 7 = 10$ et $1 + 0 = 1$; $1 + 8 = 9$ et l'on ne compte pas cette somme ; $5 + 7 = 12$ et $1 + 2 = 3$: le reste est 3.

Divisibilité par 11.

156. Tout nombre entier est un multiple de 11 plus ou moins la différence entre la somme des chiffres des rangs impairs et celle des chiffres des rangs pairs, suivant que la première somme est plus grande ou plus petite que la seconde ; il résulte de là qu'un nombre entier est divisible par 11, quand la différence entre la somme des chiffres des rangs impairs et celle des chiffres des rangs pairs est nulle ou forme un multiple de 11.

Démonstration.—$10 = 11 - 1$, donc $10^2 = 10 . 11 - 10 = 10 . 11 - 11 + 1 = \dot{11} + 1$; $10^3 = 10 . \dot{11} + 10 = 10 . 11 + 11 - 1 = \dot{11} - 1$ et ainsi de suite ; de sorte qu'une unité de rang impair est un multiple de 11 plus 1 et qu'une unité de rang pair est un multiple de 11 moins 1 ; d'où l'on déduit aussi que toute collection d'unités est un multiple de 11 plus ou moins le chiffre de la collection, suivant que celle-ci est de rang impair ou de rang pair.

Cela posé, tout nombre entier étant la somme de ses collections d'unités peut être décomposé en trois parties : 1° un multiple de onze, 2° la somme des chiffres des rangs impairs qui doit être ajoutée, 3° la somme des chiffres des rangs pairs qui doit être soustraite ; donc, suivant que la première somme est plus grande ou plus petite que la seconde, le nombre sera un multiple de 11 plus ou moins la différence des deux sommes ; le caractère de divisibilité résulte immédiatement de ce principe.

Digitized by Google

REMARQUES.

157. I. — Quand la différence entre la somme des chiffres des rangs impairs et celle des rangs pairs n'est pas nulle ou divisible par 11, il peut se présenter deux cas :

1° la somme des chiffres des rangs impairs est plus grande que celle des rangs pairs ; alors, quand on divise la différence par 11 on a le même reste qu'en divisant, par 11, le nombre proposé (**123**).

2° la première somme est plus petite que la seconde; alors le nombre proposé est un multiple de 11 moins la différence des deux sommes, ou bien comme il est facile de le montrer : le nombre proposé plus la différence est un multiple de 11, de sorte que, si l'on divise successivement le nombre proposé puis la différence par 11, les deux restes doivent faire ensemble 11, ou bien encore le premier reste est le complément, sur 11, du second.

158. II. — Il y a un autre caractère de divisibilité par 11 dont l'application est commode dans la pratique ; il est basé sur ce principe : Si l'on décompose un nombre entier en tranches de deux chiffres en commençant par la droite, le nombre est un multiple de 11 plus la somme des tranches.

En effet l'unité suivie d'un nombre pair de zéros est un multiple de 11 plus un, donc aussi tout nombre entier suivi d'un nombre pair de zéros est un multiple de 11 plus le nombre.

159. De là résulte un moyen très facile pour trouver le reste de la division d'un nombre, le diviseur étant 11 ; on partage le nombre en tranches de deux chiffres en commençant par la droite; on retranche de chaque tranche le plus grand multiple de 11 qui y est contenu ; on fait la somme de tous les restes et l'on opère sur cette somme comme sur le nombre proposé et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un reste plus petit que 11.

Ex. : Soit le nombre 78'93'60'50'98'67 ; la tranche 78 donne pour reste 1 ; 93 donne 5 .... et la somme des restes est $1 + 5 + 5 + 6 + 10 + 1 = 28$; et en retranchant de 28 le plus grand multiple de 11 qui y est contenu, on obtient pour résultat 6 : c'est le reste qu'on obtiendrait en divisant le nombre proposé par 11.

160. On a démontré (**142**) que lorsqu'un nombre est divisible séparément par des nombres qui, deux à deux, sont premiers entre eux, il est divisible par leur produit; il résulte de là qu'un

Digitized by Google

nombre est divisible par $6 = 2 \times 3$, quand il est divisible séparément par 2 et par 3 ; on trouve aussi. de cette manière, les caractères de divisibilité par $18 = 2 \times 9$, $22 = 2 \times 11$, $15 = 3 \times 5$, $12 = 3 \times 4$, $20 = 4 \times 5$, $24 = 3 \times 8$, $30 = 5 \times 6$, $36 = 4 \times 9$, $40 = 5 \times 8$, $50 = 2 \times 25$, $60 = 4 \times 3 \times 5$, etc.

161. Le caractère de divisibilité par 6 peut être démontré directement comme suit : Soit un nombre N divisible séparément par 2 et par 3 ; puisque N est divisible par 3 on peut écrire $N = 3 \times q$ (q représentant le quotient N par 3) ; ce quotient est pair, car s'il était un nombre impair, le premier chiffre à droite serait 1, 3, 5, 7 ou 9 et le premier chiffre à droite du produit $3 \times q$ ou N serait 3, 9, 5, 1 ou 7 ; de sorte que N ne serait pas divisible par 2, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le quotient q étant un nombre pair est un multiple de 2, et on pourra le représenter par $2 \times q'$ (q' est un nombre entier) ; donc $N = 3 \times 2 \times q' = 6 \times q'$, c'est un multiple de 6. (Note XXI.)

Application. — Preuves des opérations par 9 et par 11.

(Appendice III.)

I. — ADDITION.

162. On prend les restes de la division par 9 ou 11 de tous les nombres à ajouter ; on fait la somme de ces restes, et l'on prend le reste de la division par 9 ou 11 de cette somme : ce reste doit être le même que celui de la division par 9 ou 11, du total de l'addition, si celui-ci est exact.

II. — SOUSTRACTION.

163. On prend les restes de la division par 9 ou 11 du plus petit nombre et du reste ; on les ajoute, et l'on prend le reste par 9 ou 11 de leur somme : ce reste doit être égal à celui de la division par 9 ou 11 du plus grand des deux nombres.

Ces deux règles se démontrent facilement.

III. — MULTIPLICATION.

164. *Principe fondamental.* — Considérons les deux restes qu'on obtient en divisant deux nombres par un diviseur quelconque, si l'on divise par le diviseur, d'abord le produit des deux restes puis le produit des deux premiers nombres, les deux divisions donneront le même reste.

Digitized by Google

Démonstration. — Soient les deux nombres 75 et 40 ; en divisant 75 par le diviseur 9 on a pour reste 3, et en divisant 40 par le même diviseur 9, on a pour reste 4 ; de sorte que $75 = \dot{9} + 3$ et $40 = \dot{9} + 4$; cela posé, considérons le produit 75×40, si l'on diminue le facteur 75 d'un multiple de 9 de manière à ne conserver que 3, le produit 75×40 sera diminué d'un multiple de 9 ; de même en remplaçant 40 par 4 le produit sera encore diminué d'un multiple de 9 ; donc $75 \times 40 = 3 \times 4 + \dot{9}$; de sorte que si l'on divise, par 9, le produit 3×4 des deux restes puis le produit 75×40 des deux nombres, les deux divisions donneront le même reste.

165. *Conséquence.* — Pour faire la preuve par 9 de la multiplication, on fait le produit des restes de la division par 9 des facteurs donnés, si le résultat est égal au reste de la division par 9 du produit obtenu ou n'en diffère que par un multiple de 9, on a une vérification du premier calcul.

IV. — DIVISION.

166. Pour faire la preuve par 9 de la division, on fait le produit des restes, par 9, du diviseur et du quotient trouvé, et l'on ajoute à ce produit le reste, par 9, du reste trouvé, quand il y en a un ; cela fait, si le résultat est égal au reste du dividende, par 9, ou n'en diffère que par un multiple de 9, on a une vérification du premier calcul.

167. REMARQUE. — Si l'on n'obtient pas le même reste, on est *certain* que le résultat à vérifier n'est pas exact ; et si l'on obtient le même reste, il y a *apparence* et non certitude que l'opération est bien faite. Quoique les raisonnements qui précèdent s'appliquent à tous les diviseurs, on n'opère généralement qu'avec les nombres 9 et 11 parce que le calcul des restes qu'on obtient pour ces diviseurs exige qu'on opère sur tous les chiffres des nombres dont il s'agit ; cependant on remarquera que la méthode laisse échapper toute erreur qui est un multiple du diviseur employé. (Note XXII.)

EXERCICES.

I. Démontrez les principes suivants :

1. Si d'un nombre on retranche la somme de ses chiffres, le résultat est divisible par 9.
2. La différence de deux nombres composés des mêmes chiffres est toujours divisible par 9.
3. Un nombre est divisible par 4, si le chiffre des unités plus deux fois celui des dizaines forment un nombre divisible par 4.
4. La somme ou la différence de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs sont toujours des nombres pairs ; et de deux nombres dont l'un est pair et l'autre impair sont des nombres impairs.

Digitized by Google

5. 1° Toute puissance de 10^3 est un multiple de 27 ou de 37 plus un; 2° toute puissance de 10^3, de degré impair, est un multiple de 7, 11 ou 13 moins un et toute puissance de 10^3, de degré pair, et un multiple de 7, 11 ou 13 plus un. (Applications.)

6. Un nombre est divisible par 7, 11 et 13 quand il est formé de deux périodes égales de trois chiffres placées l'une à côté de l'autre, et par 73 et 137 quand il est formé formé de la même manière de deux périodes de quatre chiffres.

7. Si l'on multiplie un nombre entier par 11, la somme des colonnes des rangs impairs égale la somme des colonnes des rangs pairs. (Démonstration directe.)

8. Un nombre est composé de six chiffres, les troisième, quatrième, cinquième chiffre, en commençant par la droite, sont respectivement le double des premier, deuxième et troisième ; démontrez que ce nombre est divisible par 23 et par 29. (N. C. M., 1re année, p. 92.)

9. Soit le nombre 1234; écrivez à la droite un nombre de deux chiffres de manière que le nombre résultant soit divisible par 72.

10. Si D est premier avec B, et si l'on divise successivement 1, B, B^2... B^{D-1} par D il y aura au moins une puissance de B qui donnera pour reste un, ensuite les mêmes restes se reproduiront périodiquement. (Conséquence.)

II. Répondez aux questions suivantes :

1. Quand un nombre est-il divisible par 99 et quand par 101 ?
2. Pourquoi deux nombres entiers consécutifs sont-ils toujours premiers entre eux ?
3. Pourquoi le produit de trois nombres entiers consécutifs est-il toujours divisible par 6 ?
4 Quelle est la règle qui permet d'obtenir le reste de la division par 12, et quelle est cette règle pour 18 ?

§ V. — DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN LEURS FACTEURS PREMIERS.

168. Décomposer un nombre en ses facteurs premiers, c'est déterminer les facteurs premiers dont le produit est égal au nombre proposé.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

169. I. — Si un nombre n'est pas premier, il est le produit de plusieurs facteurs premiers.

Démonstration. — Un nombre qui n'est pas premier a au moins un diviseur premier ; si le quotient n'est pas premier, il sera le produit d'un nombre premier par un deuxième quotient, etc.

170. II. — Un nombre entier ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers.

Démonstration — Soit $N = a \times b \times c \times d$ (a, b, c... sont des nombres premiers) ; supposons qu'on puisse décomposer N d'une autre manière ; ou bien il y aura d'autres facteurs, ou bien le même facteur n'entrera pas le même nombre de fois dans le produit.

Il est impossible qu'il y ait un autre facteur, car ce serait un diviseur de N, donc il devrait être égal à l'un des facteurs premiers a, b, c,... (**140**) ; ensuite le même facteur doit se retrouver un même nombre de fois dans les deux produits égaux à N

Digitized by Google

en effet, supposons que par une première décomposition N ait quatre fois le facteur a et par une deuxième décomposition trois fois le même facteur a ; si l'on divise N et par conséquent les deux produits par a^3, les deux quotients devraient être égaux, et pourtant l'un aurait le facteur a tandis que l'autre ne l'aurait pas, ce qui est absurde.

171. *Règle.* — Pour décomposer un nombre entier en ses facteurs premiers, on essaie la division par les nombres premiers consécutifs 2, 3, 5.... jusqu'à ce qu'on trouve un diviseur pour lequel le reste de la division soit nul : on a alors le plus petit facteur premier du nombre proposé. On divise le quotient par le même nombre premier ou par les nombres premiers suivants, jusqu'à ce qu'on trouve encore un diviseur qui donne un reste nul : on a alors un second facteur premier du nombre proposé. On opère de la même manière sur le nouveau quotient, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait un quotient premier : ce quotient sera le dernier facteur premier du nombre proposé. (Note XXIII.)

REMARQUES.

172. I. — Pour décomposer un produit de deux ou de plusieurs nombres en ses facteurs premiers, on peut décomposer séparément chacun des facteurs du produit. Par exemple : $5400 = 54 \times 100 = 2 \times 3^3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$.

173. II. — Pour calculer avec facilité, il est indispensable de connaître par cœur la décomposition des 100 premiers nombres entiers[1].

174. III. — Pour avoir tous les diviseurs d'un nombre donné, on décompose ce nombre en ses facteurs premiers puis on fait un tableau d'autant de lignes qu'il y a de facteurs premiers différents : chacune de ces lignes est formée de l'unité et des puissances successives de l'un des facteurs premiers, depuis la première jusqu'à celle qui figure dans le nombre donné.

On multiplie ensuite tous les nombres de la première ligne par chacun des nombres de la deuxième, puis les produits trouvés par chacun des nombres de la troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les lignes du tableau : les produits obtenus par les nombres de la dernière ligne seront tous les diviseurs du nombre donné.

---

1. Voir mon précis d'arithmétique théorique et pratique à l'usage des classes de 7e et 6e. M. V.-A. Le Besgue a composé des tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers (Paris, Gauthier-Villars, 1865). Une disposition ingénieuse permet de concentrer en 18 pages tous les diviseurs des nombres depuis 1 jusqu'à 115500.

Digitized by Google

Par ex. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; on fait le tableau :

1,	2,	2^2,	2^3		1,	2,	4,	8
1,	3,	3^2		ou bien	1,	3,	9	
1,	5				1,	5		

En opérant d'après la règle, on obtiendra les diviseurs suivants :

1,	2,	4,	8,
3,	6,	12,	24,
9,	18,	36,	72,
5,	10,	20,	40,
15,	30,	60,	120,
45,	90,	180,	360.

La règle est fondée sur le principe suivant : pour qu'un nombre soit divisible par un autre, *il faut et il suffit que chaque facteur premier du diviseur se trouve au dividende avec un exposant au moins égal à celui qu'il a au diviseur ;* la condition est *nécessaire* car lorsque le dividende est divisible par le diviseur, il est un multiple du diviseur, donc il comprend tous les facteurs du diviseur avec des exposants au moins égaux à ceux du diviseur ; la condition est *suffisante*, car lorsqu'elle est satisfaite, on peut décomposer le dividende en deux facteurs, dont l'un est le produit des facteurs du diviseur et dont l'autre est le produit des facteurs restants[1].

On trouvera le nombre total des diviseurs en augmentant de *un* chaque exposant, et en multipliant entre eux les nombres ainsi obtenus.

Ainsi dans l'exemple proposé, il y a en tout $4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs ; en effet sur la première ligne il y a $3 + 1$ diviseurs, sur la deuxième ligne $2 + 1$ diviseurs et sur la troisième $1 + 1$ diviseurs ; il y aura donc, en appliquant la règle, $(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$ diviseurs en tout.

On peut aussi obtenir tous les diviseurs d'un nombre sans décomposer celui-ci : on le divise par ceux de la suite des nombres entiers 1, 2, 3, 4... qui donnent pour reste 0 jusqu'à ce que le quotient soit moindre que le diviseur, et l'on écrit les diviseurs et les quotients ; ces nombres sont tous les diviseurs du nombre.

On trouve ainsi pour 360 :

Diviseurs	1,	2,	3,	4,	5,	6,	8,	9,	10,	12,	15,	18.
Quotients	360,	180,	120,	90,	72,	60,	45,	40,	36,	30,	24,	20.

On voit que le nombre des diviseurs est pair, excepté quand le nombre donné est un *carré parfait*, car alors le dernier diviseur et le dernier quotient sont égaux. (Note XXIV.)

175. On peut appliquer la décomposition des nombres à la recherche du p. g c. d. ; on décompose, en leurs facteurs premiers, les nombres dont on veut calculer le p. g. c. d. ; et

1. On peut aussi justifier la règle en démontrant qu'un nombre quelconque a pour diviseurs, outre ses facteurs premiers, les produits de ceux-ci deux à deux, trois à trois, etc., et ne saurait en avoir d'autres. F. Dauge, *Leçons de méthodologie mathématique.*

Digitized by Google

l'on fait le produit de tous les facteurs premiers qui se trouvent à la fois dans tous les nombres proposés, en prenant chacun avec son plus petit exposant.

Conséquence des principes précédents.

176. REMARQUE. — Il résulte immédiatement de ce procédé qu'on pourra, sans changer le p. g. c. d. de plusieurs nombres, supprimer dans chaque nombre un diviseur qui est premier avec les autres nombres.

EXERCICES.

1. Trouvez le plus petit nombre admettant 15 diviseurs.
2. Trouvez le nombre de deux chiffres qui admet le plus grand nombre de diviseurs.
3. Le plus grand de deux nombres entiers consécutifs est 31. Quel est le p. g. c. d. des produits qu'on obtient quand on multiplie le plus grand nombre par 24 et le plus petit par 56 ?
4. Pour trouver le p. g. c. d. de A, B, C on peut agir de la manière suivante : on divise les deux plus grands A et B par le plus petit C ; représentons par R et R' les restes des deux divisions : le p. g. c. d. de C, R et R' est le même que celui des nombres donnés. Démontrez cette propriété.
5. Quand A et B sont des nombres premiers entre eux, le p. g. c. d. de $A + B$ et $A - B$ est tout au plus 2 ?
6. n étant un nombre entier quelconque, le nombre $n(n+1)(2n+1)$ est toujours divisible par 6.
7. Si A et B sont des nombres entiers, le produit $A \times B \times (A^2 + B^2) \times (A^2 - B^2)$ est divisible par 30.
8. Si l'on range tous les diviseurs d'un nombre entier suivant leur grandeur, le produit des extrêmes et, en général, de deux termes également distants des extrêmes est égal au nombre lui-même.
9. Un nombre qui comprend n facteurs premiers différents, peut être décomposé de $2n - 1$ manières en deux facteurs qui sont premiers entre eux.
10. Déterminez deux nombres entiers qui aient chacun 15 diviseurs et pas d'autres diviseurs premiers que 7 et 11.
11. Trouvez le produit des diviseurs d'un nombre.
12. Combien y a-t-il de nombres plus petits que N et premiers avec N ?

§ 6. — COMMUNS MULTIPLES.[1]

177. Un *commun multiple* (c. m.) de deux ou de plusieurs nombres et un nombre qui est divisible par tous ces nombres ; le *plus petit commun multiple* (p. p. c. m.) est le plus petit nombre qui est divisible par tous les nombres.

1. Des auteurs emploient l'expression dividendes communs.

Digitized by Google

178. *Première règle.* — Pour déterminer le p. p. c. m. de deux nombres : 1° on calcule leur p. g. c. d. ; 2° on divise l'un des deux nombres proposés par ce p. g. c. d.; 3° on multiplie le quotient par l'autre nombre proposé : le produit obtenu est le p. p. c. m.

Démonstration. — Soient A et B deux nombres dont le p. g. c d. est D ; soient Q et Q' les quotients qu'on obtient quand on divise successivement A et B par D ; ces quotients sont premiers entre eux (**132**). On a $A = D \times Q$ et $B = D \times Q'$; or le p. p. c. m. M étant un multiple de A est égal au produit de A par un certain nombre, m par exemple ; d'où $M = A \times m = D \times Q \times m$; en second lieu M est un multiple de $B = D\,Q'$, donc si l'on divise M par D, ce qui donne $Q \times m$, le quotient doit être encore divisible par Q' ; or Q' est premier avec Q, donc Q' est un diviseur de m, d'où $m = Q'$ et $M = D \times Q \times Q'$ et l'on voit que le nombre M sera le plus petit possible pour le p. p. m. de Q' qui est Q' ; donc $M = D \times Q \times Q'$.

REMARQUES.

179. I. — Quand le plus grand des deux nombres proposés est divisible par le plus petit, c'est le plus grand nombre qui est le p. p. c. m. des deux nombres.

180. II. — Le p. p. c. m. de deux nombres premiers entre eux est le produit de ces deux nombres.

181. *Deuxième règle.* — Pour trouver le p. p. c. m. de plus de deux nombres, on cherche le p. p. c. m. de deux des nombres proposés, puis le p. p. c. m. du résultat et d'un troisième nombre, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres proposés : le dernier résultat obtenu est le p. p. c. m. cherché.

Démonstration. — Soient les nombres A, B, C, D ... ; désignons par M le p. p. c. m. de A et de B ; tout c. m de A et de B ne peut être qu'un multiple de M, et sera divisible par M ; cela posé, le p. p. c. m. M' de A, B, C doit être divisible par A et par B, donc par M et par C, de sorte que M' sera le p. p. c. m. de M et de C et ainsi de suite.

REMARQUES.

182. I. — Dans la pratique, il est utile de ranger les nombres proposés dans l'ordre *décroissant* des grandeurs, et de commencer les opérations par les deux plus grands nombres.

183. II. — De même que lorsqu'il s'agit de deux nombres, si le plus grand nombre est divisible par tous les autres, c'est le plus grand nombre qui est le p. p. c. m. des nombres proposés.

Digitized by Google

184. III. — Quand tous les nombres sont premiers deux à deux, le p. p. c. m. est le produit effectué de tous les nombres.

185. IV. — Dans la recherche du p. p. c. m. on peut négliger les nombres qui en divisent d'autres parmi les nombres proposés.

186. V. — Pour trouver le p. p. c. m. on peut aussi opérer comme suit : on décompose les nombres en leurs facteurs premiers et l'on fait le produit de tous les facteurs premiers différents en donnant à chacun d'eux le plus grand exposant qu'il a dans les nombres proposés.

Par ex. : le p. p. c. m. de $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, et $1404 = 2^2 \times 3^3 \times 13$ est $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 13 = 98280$.

EXERCICES.

1, Démontrez que tout multiple commun de plusieurs nombres est un multiple du p. p. c. m.

2. Pour qu'un multiple commun soit le plus petit, il faut et il suffit qu'en le divisant successivement par chacun des nombres proposés, on obtienne des quotients premiers entre eux.

3. Le p. p. c. m. de n nombre est égal à leur produit divisé par le p. g. c. d. des produits $n - 1$ à $n - 1$ de ces nombres.

4. Le p. p. c. m. de plusieurs nombres est égal à un multiple commun quelconque divisé par le p. g. c. d. des quotients obtenus en divisant ce multiple commun par chacun des nombres.

5. Le produit de n nombres est égal au p. p. c. m. des produits obtenus en combinant ces nombres i à i, multiplié par le p. g. c. d. des produits obtenus en les combinant $n - i$ à $n - i$. (Pour ces cinq premiers exercices voir M, 1883, p. 217.)

6. Trouvez deux nombres sachant que leur p. g. c. d. est 20 et leur p. p. c. m. 420.

7. Si un nombre N est divisible séparément par a, b, c et si les quotients n'ont pas de diviseur commun, N est le p. p. c. m. de a, b, c.

8. Trouvez le plus petit nombre qui, divisé par 8, 9, 12, 14 et 15, donne toujours *un* pour reste.

9. Combien y a-t-il de nombres plus petits que N et premiers avec N ?

10. Démontrez que, si l'on divise la somme de deux nombres et leur p. p. c. m. par leur p. g. c. d., les quotients obtenus sont premiers entre eux [1].

1. Concours général de la 3e scientifique, août 1889.

Digitized by Google

DEUXIÈME PARTIE. — NOMBRES FRACTIONNAIRES.

SECTION I.

Fractions ordinaires.

187. On sait qu'une fraction ordinaire est composée de une ou de plusieurs parties aliquotes de l'unité (**6**) ; que, pour l'exprimer, il ne faut qu'un seul dénominateur et un seul numérateur ; enfin, qu'on écrit celui-ci au-dessus de celui-là avec un petit trait entre les deux termes (**24**).

188. Quand le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction a une valeur *moindre que un* et l'on dit que c'est une *fraction proprement dite*. Quand le numérateur est égal au dénominateur la fraction a pour valeur *un*. Quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction vaut *plus que un* et l'on dit que c'est une *expression fractionnaire*. Tout nombre composé d'un nombre entier et d'une fraction proprement dite est appelée plus spécialement un *nombre fractionnaire;* par exemple : $7 + \frac{2}{3}$ qu'on écrit simplement $7\frac{2}{3}$.

189. Deux fractions sont dites *complémentaires* quand leur somme est *un*. Exemple : $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{7}$. Une fraction est l'*inverse* d'une autre quand elle a pour numérateur le dénominateur de l'autre, et réciproquement. Exemple : $\frac{3}{2}$ est l'inverse de $\frac{2}{3}$. L'inverse d'un nombre entier est une fraction qui a *un* pour numérateur et le nombre entier pour dénominateur. Exemple : $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3.

CHAPITRE I.

Transformations fondamentales.

§ I. — PRINCIPES FONDAMENTAUX.

190. I. — Quand plusieurs fractions ont le même dénominateur, celle-là est la plus grande qui a le plus grand numérateur ; au contraire, quand plusieurs fractions ont le même numérateur, celle-là est la plus grande qui a le plus petit dénominateur.

Digitized by Google

191. II. — Quand deux fractions ont le même dénominateur et que le numérateur de l'une est 2, 3... fois plus grand que le numérateur de l'autre, la première fraction est 2, 3... fois plus grande que la seconde ; au contraire, si le dénominateur de la première fraction est 2, 3... fois plus grand que le dénominateur de la seconde, la première est 2, 3... fois plus petite que la seconde.

192. III. — Deux fractions sont *équivalentes* quand les deux termes de l'une sont des équi-multiples des deux termes de l'autre.

Ces trois principes se démontrent facilement en se basant sur la définition même des deux termes d'une fraction ordinaire.

Il résulte de ce troisième principe que des fractions telles que $\frac{25}{36}$ et $\frac{25}{36}\,\frac{25}{36}$ sont équivalentes car les deux termes de la seconde sont formés en multipliant les deux termes de la première par le même nombre 101.

193. IV. — Si une fraction, dont les deux termes sont premiers entre eux, est équivalente à une autre fraction, les deux termes de celle-ci doivent être des équi-multiples des deux termes de celle-là.

Démonstration. — Soit la fraction $\frac{a}{b}$ dont les deux termes sont premiers entre eux, et qui est équivalente à une fraction quelconque $\frac{c}{d}$; alors $\frac{a \times d}{b \times d}$ est aussi une fraction équivalente à $\frac{c \times b}{d \times b}$; d'où le numérateur $a \times d = c \times b$, et comme a divise $a \times d$, a doit diviser aussi le produit $c \times b$; or, par hypothèse, a est premier avec b, donc a divise c (**140**) ; mais le numérateur c de la fraction $\frac{c}{d}$ étant un certain multiple du numérateur a, il faut donc que le dénominateur d soit le même multiple du dénominateur b, car sinon les deux fractions ne seraient pas équivalentes[1].

194. REMARQUE. — Une fraction proprement dite augmente ou diminue de valeur quand on augmente ou qu'on diminue les deux termes d'un même nombre ; c'est le contraire qui arrive pour une expression fractionnaire.

Soit la fraction $\frac{7}{11}$; augmentons, de 4, les deux termes et nous obtenons la fraction proprement dite $\frac{11}{15}$; à la première fraction il manque $\frac{11-7}{11} = \frac{4}{11}$ pour faire l'unité et à la seconde il manque $\frac{15-11}{15} = \frac{4}{15}$; or la fraction complémentaire $\frac{4}{15}$ a le même

1. Nous n'hésitons pas à employer la notation des lettres pour les démonstrations, chaque fois qu'elle simplifie considérablement le raisonnement ; dans les classes supérieures, il faut que les élèves s'habituent à cette méthode.

Digitized by Google

numérateur que la fraction complémentaire $\frac{4}{11}$ (**59**) et le dénominateur 15 > 11 ; donc $\frac{4}{15} < \frac{4}{11}$ et la fraction $\frac{11}{15}$ est plus près de l'unité que la fraction $\frac{7}{11}$. Démonstration analogue quand il s'agit d'une expression fractionnaire.

§ II. — TRANSFORMATION DES NOMBRES ENTIERS ET DES EXPRESSIONS FRACTIONNAIRES.

195. I. Pour transformer un nombre entier en une fraction ayant un dénominateur donné, on prend, pour numérateur de la fraction demandée, le produit du nombre entier par le dénominateur donné.

196. II. Pour transformer un nombre fractionnaire en une expression fractionnaire : 1° on multiplie le nombre entier par le dénominateur ; 2° on ajoute le numérateur au produit obtenu ; c'est le numérateur de l'expression fractionnaire sous lequel on écrit le dénominateur de la fraction.

197. III. Réciproquement, pour transformer une expression fractionnaire en un nombre fractionnaire, on divise le numérateur par le dénominateur : le nombre fractionnaire est égal au quotient entier, plus une fraction proprement dite dont le numérateur est le reste de la division et dont le dénominateur est celui de l'expression fractionnaire elle-même.

On démontrera facilement ces transformations.

198. REMARQUE. — Il est quelquefois utile, dans la pratique, de convertir une fraction ordinaire en une autre de dénominateur quelconque donné ; par exemple, $\frac{35}{8}$ en la fraction qui a pour dénominateur 5 ; on multiplie le numérateur par 5 ; on obtient ainsi une fraction 5 fois plus grande ; on extrait les entiers ; on trouve ainsi que $21 < \frac{35 \times 5}{8} < 22$; donc $\frac{21}{5} < \frac{35}{8} < \frac{22}{5}$; et $\frac{21}{5}$ ou $\frac{22}{5}$ sont des valeurs de $\frac{35}{8}$ à un cinquième près, l'une par défaut et l'autre par excès.

§ III. — SIMPLIFICATION DES FRACTIONS ORDINAIRES.

199. *Simplifier une fraction*, c'est transformer cette fraction en une fraction équivalente avec des termes plus petits ; une fraction est dite *irréductible* ou *réduite à sa plus simple expression* quand elle ne peut plus être simplifiée.

200. *Règle.* — On simplifie une fraction en divisant les deux termes par un même nombre (**192**) ; et l'on réduit une fraction à sa plus simple expression en divisant les deux termes par leur

Digitized by Google

plus grand commun diviseur ; ou bien, comme on le fait ordinairement dans la pratique, en divisant successivement les deux termes par les diviseurs communs jusqu'à ce qu'on obtienne deux quotients premiers entre eux.

Démonstration. — Quand on divise les deux termes par leur p. g. c. d., on obtient une nouvelle fraction dont les deux termes sont premiers entre eux (**132**), et toute autre fraction équivalente aura des termes plus grands puisqu'ils sont des équi-multiples des termes de la première fraction (**193**).

201. REMARQUE. — Lorsqu'on a une fraction, telle que $\frac{28}{7}$, dont le numérateur est un multiple du dénominateur, et qu'on divise les deux termes par le dénominateur, on obtient la fraction $\frac{4}{1}$ dont le dénominateur est *un*. Cette expression n'a pas de sens par elle-même (**13**) ; mais, comme la fraction $\frac{28}{7} = \frac{4}{1} = 4$, on convient de regarder les expressions $\frac{4}{1}$ et 4 comme synonymes ; cette manière de voir permet de généraliser les propositions et les règles de calcul relatives aux fractions.

§ IV. — RÉDUCTION DES FRACTIONS AU MÊME DÉNOMINATEUR.

202. Réduire des fractions à un même dénominateur, c'est transformer ces fractions en d'autres fractions qui ont la même valeur que les premières et un dénominateur commun ; généralement, quand on parle de réduire des fractions au même dénominateur, il est implicitement admis, à moins de désignation contraire, que les fractions auront un dénominateur commun le plus petit possible.

203. *Règle.* — Pour réduire des fractions irréductibles au plus petit commun dénominateur : 1° on détermine le p. p. c. m. des dénominateurs ; 2° on multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient qu'on obtient en divisant le p. p. c. m. par le dénominateur de la fraction que l'on considère.

Démonstration. — Toute fraction équivalente à une fraction irréductible donnée ne peut s'obtenir qu'en multipliant les deux termes de celle-ci par un même nombre (**193**) ; donc, le plus petit dénominateur commun est le p. p. c. m. des dénominateurs ; etc.

REMARQUES.

204. I. — Quand le plus grand dénominateur est un multiple des autres dénominateurs, c'est le plus grand dénominateur qui est le p. p. c. m. des dénominateurs (**179**) ; dans ce cas, on multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient qu'on obtient en divisant le plus grand dénominateur par le dénominateur de la fraction que l'on considère.

Digitized by Google

205. II. — Quand les dénominateurs sont premiers entre eux, leur p. p. c. m. est le produit des dénominateurs (**180**) ; dans ce cas, s'il n'y a que deux fractions, on multiplie les deux termes de la première fraction par le dénominateur de la seconde et les deux termes de la seconde fraction par le dénominateur de la première ; s'il y a plus de deux fractions, on multiplie les deux termes de chaque fraction par le produit effectué des dénominateurs de toutes les autres fractions.

206. III. — Quand il n'y a que deux fractions à réduire, et que les deux dénominateurs ont un diviseur commun, il est plus simple d'opérer comme suit :

1° On détermine le p. g. c. d. des deux dénominateurs ; 2° on divise successivement chaque dénominateur par ce diviseur commun ; 3° on multiplie les deux termes de la première fraction par le deuxième quotient et les deux termes de la deuxième fraction par le premier quotient[1].

EXERCICES.

1. Étant données plusieurs fractions irréductibles, on demande de trouver l'expression fractionnaire la plus petite qui, divisée par chacune des fractions proposées, donne des quotients entiers.

2. Trouvez 3 fractions, les plus simples possibles, qui soient respectivement égales à $\frac{11}{18}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{26}{43}$ et telles que le dénominateur de chacune soit égal au numérateur de la suivante.

CHAPITRE II.

Addition et soustraction.

RÈGLES.

207. *Première règle.* — Pour additionner des fractions de même dénominateur, on doit additionner les numérateurs et diviser cette somme par le dénominateur commun.

Car les parties dont se composent les fractions sont de même grandeur.

208. *Deuxième règle.* — Pour additionner des fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on doit les réduire à un même dénominateur et puis opérer d'après la règle précédente.

---

1. Pour tous les autres détails de calcul, voir mon *Précis d'arithmétique.*

Digitized by Google

209. *Troisième règle.* — Pour additionner des nombres fractionnaires, on additionne séparément, d'abord les fractions, puis les nombres entiers; et, s'il y a lieu, on ajoute à cette seconde somme l'entier contenu dans la première.

210. *Quatrième règle.* — Pour trouver la différence de deux fractions de même dénominateur, on soustrait le plus petit numérateur du plus grand et l'on divise cette différence par le dénominateur commun.

211. *Cinquième règle.* — Pour trouver la différence de deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on les réduit au même dénominateur et l'on opère comme dans la règle précédente.

212. *Sixième règle.* — Quand il s'agit de nombres fractionnaires, on fait séparément la soustraction des fractions, puis celle des nombres entiers et l'on additionne les deux résultats. S'il arrive que la fraction à soustraire est plus grande que l'autre, on soustrait la première de un et l'on ajoute l'autre fraction au reste ; mais, par compensation, on augmente de un le plus petit nombre entier, avant de passer à la soustraction des nombres entiers.

Cette transformation revient à ajouter le nombre un à chacun des deux termes de la soustraction ; il y a donc bien compensation (**59**). (Note XXV.)

REMARQUES.

213. I. — Si deux fractions sont équivalentes, en les additionnant ou les soustrayant terme à terme on obtient des fractions équivalentes.

Démonstration. — Si les fractions sont équivalentes, les termes de chaque fraction sont des équi-multiples des termes de la fraction irréductible équivalente ; donc en additionnant ou en soustrayant les fractions terme à terme, on obtiendra une nouvelle fraction dont les deux termes seront des équi-multiples de la fraction irréductible équivalente aux fractions considérées.

214. II. — Soit l'égalité $\frac{24}{36} = \frac{30}{45}$, alors $1 \pm \frac{24}{36} = 1 \pm \frac{30}{45}$ ou bien $\frac{36 \pm 24}{36} = \frac{45 \pm 30}{45}$; de même $\frac{36}{24} = \frac{45}{30}$ d'où $\frac{36 \pm 24}{24} = \frac{45 \pm 30}{30}$ ou $\frac{24}{36 \pm 24} = \frac{30}{45 \pm 30}$.

On énoncera facilement les principes qui découlent de ces formules.

Digitized by Google

EXERCICES.

1. Démontrez que deux fractions irréductibles ne peuvent avoir pour somme ou pour différence un nombre entier, que si elles ont le même dénominateur.

2. Démontrez que lorsqu'on prend dans la suite

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{m\times(m+1)}$$

un nombre m de ces fractions de plus en plus grand, la somme de toutes les fractions tend vers *un*.

CHAPITRE III.

Multiplication et élévation aux puissances.

RÈGLES.

215. *Première règle.* — Pour multiplier une fraction par un nombre entier, on conserve le numérateur et l'on divise le dénominateur par le nombre entier ; mais, quand la division ne peut pas s'effectuer exactement, on multiplie le numérateur par le nombre entier, et l'on conserve le dénominateur.

Démonstration. — $2\times\frac{7}{8}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$, car multiplier $\frac{7}{8}$ par 2 c'est prendre 2 fois la fraction $\frac{7}{8}$ (**41**), donc le produit doit être 2 fois plus grand que $\frac{7}{8}$, on aura donc le produit en divisant, par 2, le dénominateur (**191**) ; de même $2\times\frac{7}{5}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$.

REMARQUES.

216. I. — Le produit d'une fraction par le dénominateur est un nombre entier égal au numérateur ; et le produit d'une fraction par un multiple du dénominateur est un nombre entier qui est le même multiple du numérateur.

217. II. — En appliquant la règle ainsi que celles qui suivront, on ne négligera pas de supprimer les facteurs communs aux deux termes.

218. *Deuxième règle.* — Pour multiplier un nombre fractionnaire par un nombre entier, on opère successivement sur la fraction, puis sur la partie entière du nombre fractionnaire, et l'on additionne les deux produits.

219. *Troisième règle.* — Pour multiplier un nombre entier par une fraction ou par un nombre fractionnaire, on opère comme s'il fallait multiplier la fraction ou le nombre fractionnaire par le nombre entier.

Digitized by Google

Démonstration. — $\frac{7}{8} \times 2 = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$; en effet, multiplier 2 par $\frac{7}{8}$ c'est prendre les 7 huitièmes de 2, c'est-à-dire 7 fois le 8me de 2; le 8me de $2 = \frac{2}{8}$ et 7 fois le 8me $= \frac{7 \times 2}{8} = 2 \times \frac{7}{8}$.

De même $3\frac{2}{5} \times 7 = 7 \times 3\frac{2}{5} = 23\frac{4}{5}$; il faut prendre les $\frac{2}{5}$ de 7 puis ajouter 3 fois 7, ou, ce qui revient au même, multiplier 7 par $\frac{2}{5}$, puis ajouter le produit de 7 par 3.

220. *Quatrième règle.* — Pour multiplier une fraction par une fraction, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs, ou, comme on le dit ordinairement, on multiplie les deux fractions terme à terme : le premier produit est le numérateur et le deuxième produit est le dénominateur du produit demandé.

Démonstration. — $\frac{7}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{35}{72}$; en effet, multiplier $\frac{5}{9}$ par $\frac{7}{8}$ c'est prendre 7 fois le 8me de $\frac{5}{9}$; or le 8me de $\frac{5}{9}$ est $\frac{5}{8 \times 9}$, et 7 fois ce 8me font $\frac{7 \times 5}{8 \times 9}$.

REMARQUES.

221. I. — Avant d'effectuer les multiplications, on aura soin de supprimer les diviseurs communs aux deux termes; si l'un des facteurs est un nombre fractionnaire, on le convertira d'abord en une expression fractionnaire équivalente.

222. II. — Pour prendre une fraction d'un nombre donné on doit, d'après la définition même de la multiplication, multiplier le nombre donné par la fraction. Pour prendre la moitié, le tiers .... d'un nombre, on peut diviser le nombre par 2, 3 .... ou bien le multiplier par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ....

223. III. — Des règles précédentes on conclut que la valeur d'un produit ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs ; ce même principe a été déjà démontré pour les facteurs entiers (**77**).

224. IV. — Quand un des facteurs est un nombre entier, on peut le remplacer par une fraction qui a le nombre entier pour numérateur et le nombre *un* pour dénominateur ; quand c'est un nombre fractionnaire on peut le remplacer par une expression fractionnaire équivalente ; de sorte que le calcul peut toujours être ramené à la multiplication de deux fractions ordinaires.

225. V. *Méthode par les parties aliquotes.* — Des unités d'un certain ordre qui sont exactement contenues dans l'unité immédiatement supérieure, s'appellent des *parties aliquotes* de cette unité. La méthode de la multiplication par les parties aliquotes est celle qui s'appuie sur la décomposition

Digitized by Google

des fractions en parties aliquotes de l'unité supérieure ; voici quelques exemples de l'emploi de cette méthode très féconde pour abréger les calculs.

1° $\frac{5}{6} \times 10$; on décompose $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$; d'où $\frac{5}{6} \times 10 = \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{3} \times 10 = 5 + 3\frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$;

2° $\frac{7}{8} \times 14$; on décompose $\frac{7}{8}$ en $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; d'où $\frac{7}{8} \times 14 = \frac{1}{2} \times 14 + \frac{1}{4} \times 14 + \frac{1}{8} \times 14 = 7 + 3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} = 12\frac{1}{4}$;

3° $10\frac{3}{4} \times 1855\frac{3}{31}$; on décompose $10\frac{3}{4}$ en $10 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; d'où $10\frac{3}{4} \times 1855\frac{3}{31} = 10 \times 1855\frac{3}{31} + \frac{1}{2} \times 1855\frac{3}{31} + \frac{1}{4} \times 1855\frac{3}{31} = 18550\frac{30}{31} + 927\frac{17}{31} + 463\frac{24}{31} = 19942\frac{9}{31}$.

226. *Cinquième règle.* — Pour multiplier entre eux plus de deux facteurs, on multiplie entre eux les deux premiers facteurs, puis le produit par le troisième facteur, etc.

227. Remarque. — On peut généraliser le principe fondamental de l'interversion des facteurs et en déduire toutes les conséquences trouvées pour les nombres entiers (**77**).

228. *Sixième règle.* — Pour élever une fraction à une puissance donnée, on élève successivement les deux termes à cette puissance : la puissance du numérateur sera le numérateur du résultat demandé et la puissance du dénominateur en sera le dénominateur. Si c'est un nombre fractionnaire qu'il faut élever à une puissance donnée, on transforme d'abord le nombre fractionnaire en une expression fractionnaire équivalente.

229. Remarque. — Une puissance d'une fraction proprement dite et irréductible est aussi une fraction proprement dite et irréductible (**141**, 3°) ; la puissance devient de plus en plus petite à mesure qu'on élève à une puissance d'un degré plus élevé.

EXERCICES.

1. On veut multiplier par 20 la fraction $\frac{4}{8}$; on ajoute d'abord 4 au numérateur, quelle opération doit-on faire sur le dénominateur ?

2. Par quel nombre faut-il multiplier le nombre 23 pour le diminuer de ses $\frac{7}{11}$?

3. Les aiguilles d'une montre marquent midi. A quelle heure se rencontreront-elles de nouveau ?

4. Un tonneau contient 340 litres de bière ; on en soutire 55 litres qu'on remplace par de l'eau ; on en soutire de nouveau 55 litres qu'on remplace encore par de l'eau, et l'on fait enfin cette opération une troisième fois. Combien le tonneau contient-il alors de bière ?

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

Division.

RÈGLES.

230. *Première règle.* — Pour diviser une fraction par un nombre entier, on divise le numérateur par le nombre entier et l'on conserve le dénominateur ; mais quand la division ne peut pas s'effectuer exactement, on conserve le numérateur et l'on multiplie le dénominateur par le nombre entier.

Demonstration. — Diviser un nombre par un nombre entier, c'est trouver un nombre qui multiplié par le diviseur produise le dividende ; de sorte que le quotient doit être autant de fois plus petit que le dividende, qu'il y a d'unités dans le diviseur ; l'opération est donc ramenée à rendre une fraction un certain nombre de fois plus petite.

231. REMARQUE. — Quand le numérateur du dividende n'est pas divisible par le diviseur, mais qu'il a un c. d. avec celui-ci, on le supprime avant de commencer la division.

232. *Deuxième règle.* — Pour diviser un nombre fractionnaire par un nombre entier : 1° on divise la partie entière par le diviseur : le quotient est la partie entière du résultat demandé; 2° on ajoute le reste à la fraction du dividende et l'on transforme ce nombre fractionnaire en l'expression fractionnaire équivalente; 3° on divise cette expression fractionnaire par le diviseur, et l'on aura la fraction du quotient.

Même démonstration que pour la première règle.

233. *Troisième règle.* — Pour diviser un nombre par une fraction ordinaire, on multiplie le dividende par l'inverse du diviseur.

Démonstration. — $3 : \frac{5}{7} = 3 \times \frac{7}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$; en effet, diviser 3 par $\frac{5}{7}$ c'est calculer le nombre qui, multiplié par $\frac{5}{7}$, produise le dividende 3 ; et l'on peut dire :

Si les $\frac{5}{7}$ du quotient font 3,
le $\frac{1}{7}$ » fait 5 fois moins ou $\frac{3}{5}$,
et les $\frac{7}{7}$ » font 7 fois plus ou $\frac{7 \times 3}{5} = \frac{7}{5} \times 3$.

REMARQUES.

234. I. — Quand on divise le nombre *un* par une fraction, le quotient est l'inverse du diviseur ; il résulte de là que si des fractions sont équivalentes, les inverses ont aussi une valeur équivalente.

Digitized by Google

235. II. — Quand on est conduit à diviser deux fractions de même dénominateur, on obtient le quotient en divisant le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur ; on déduit de là une règle, assez commode dans la pratique, pour diviser une fraction par une fraction. (A énoncer.)

236. III. — Quand le diviseur est un nombre fractionnaire, on le transforme en l'expression fractionnaire équivalente, avant d'effectuer la division.

237. IV. — Toutes les règles de la division peuvent être résumées en une seule qui ramène toute division à une multiplication : on multiplie le dividende par l'inverse du diviseur.

238. V. — Toutes les propriétés qui ont été démontrées pour la division des nombres entiers (**90**) existent aussi pour la division des fractions ordinaires ; c'est ce qu'on démontre facilement.

239. VI. — Il est quelquefois utile de trouver une fraction qui ne diffère d'une fraction donnée que d'une fraction donnée : on peut opérer comme suit : pour trouver une fraction qui diffère d'une autre fraction de moins de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$..., on multipliera la fraction proposée par le dénominateur de la fraction qui indique l'approximation ; on extraira les entiers du résultat : la fraction qui aura pour numérateur la partie entière du quotient et pour dénominateur, celui de l'approximation sera la fraction demandée.

Exemple. — Pour trouver une fraction qui diffère de $\frac{7}{9}$, de moins de $\frac{1}{4}$, on prendra 4 fois $\frac{7}{9}$ ou $\frac{28}{9}$ nombre compris entre 3 et 4, donc $3 < \frac{28}{9} < 4$ et $\frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{4}{4}$, de sorte que $\frac{3}{4}$ est, à moins de $\frac{1}{4}$, la valeur de $\frac{7}{9}$.

EXERCICES.

1. Quand le quotient de deux fractions irréductibles est-il : 1° un nombre entier ; 2° une fraction irréductible ?

2. Démontrer que si l'on additionne une fraction avec son inverse, la somme est plus grande que 2.

Digitized by Google

CHAPITRE V.

Extraction de la racine.

§ I. — RACINE CARRÉE.

240. Propriété fondamentale. — Une fraction irréductible dont les deux termes ne sont pas des carrés, ne peut pas être le carré d'une fraction.

Démonstration. — Soit la fraction irréductible $\frac{16}{27}$ dont le dénominateur n'est pas un carré parfait; elle ne peut pas être le carré d'une fraction, car s'il y avait une fraction dont le carré est $\frac{16}{27}$, comme on peut supposer que cette fraction est irréductible, le carré serait une fraction irréductible dont les deux termes seraient des carrés (**229**). Il en résulte qu'il y a des nombres qui n'ont pas de racine carrée; mais alors on peut déterminer un nombre dont le carré s'approche autant qu'on veut du nombre dont il faut extraire la racine; ce qu'on énonce de la manière suivante : si l'on veut chercher le plus grand nombre de demies, tiers.... de la racine on dit qu'on doit *extraire la racine à moins d'un demi, d'un tiers....*

RÈGLES.

241. *Première règle.* — Quand les deux termes d'une fraction ordinaire sont des carrés, la racine carrée de cette fraction ordinaire est une autre fraction dont chaque terme est la racine carrée du terme correspondant de la fraction proposée.

Démonstration. — $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, car $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

242. *Deuxième règle.* — Pour extraire la racine carrée d'un nombre, à moins de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... : 1° on multiplie le nombre par le carré du dénominateur de la fraction qui indique l'approximation; 2° on extrait la racine carrée entière du produit; 3° on divise le résultat par le dénominateur de l'approximation.

Démonstration. — Soit à calculer à moins de $\frac{1}{7}$, l'expression $\sqrt{\frac{39}{73}}$.

1° $49 \times \frac{39}{73} = \frac{1911}{73} = 26\,\frac{13}{73}$; 2° la racine carrée entière de 26 est 5; 3° $\sqrt{\frac{39}{73}} = \frac{5}{7}$ à moins de $\frac{1}{7}$: en effet, $5^2 < 26 < 6^2$, donc aussi $5^2 < 26\,\frac{13}{73} < 6^2$ ou $5^2 < 49 \times \frac{39}{73} < 6^2$; et en divisant chaque terme par $7^2 = 49$,

Digitized by Google

il vient $\left(\frac{5}{7}\right)^2 < \frac{39}{73} < \left(\frac{6}{7}\right)^2$, de sorte que $\frac{5}{7} < \sqrt{\frac{39}{73}} < \frac{6}{7}$; $\frac{5}{7}$ est la racine carrée de $\frac{39}{73}$ à moins de $\frac{1}{7}$ par *défaut* et $\frac{6}{7}$ à moins de $\frac{1}{8}$ par *excès*. (Note XXVI.)

REMARQUES.

243. I. — La deuxième règle appliquée aux nombres entiers peut rendre fort laborieuse l'extraction de la racine carrée; on pare à cet inconvénient en suivant la règle suivante : 1° on extrait la racine carrée du nombre, à moins d'une unité; 2° on multiplie le reste de l'opération par le dénominateur de l'approximation ; 3° on divise le produit ainsi obtenu par le double de la partie déjà déterminée : la partie entière du quotient étant multipliée par la fraction d'approximation, sera ce qu'il faut ajouter au nombre entier qu'on a obtenu d'abord pour avoir la racine cherchée avec le degré d'approximation voulu (en plus ou en moins). Cette règle suppose d'ailleurs, que le dénominateur de l'approximation est plus petit que le double de la partie déterminée d'abord.

Exemple. — Soit à extraire à un 7e près la racine carrée de 85432; d'après la deuxième règle il faudrait multiplier 85432 par 49, ce qui donne 4186168; extraire la racine carrée de ce nombre, à moins d'une unité, ce qui fait 2046; enfin diviser le résultat par 7 et l'on obtient $292\frac{2}{7}$.

Si l'on suit la règle que nous venons d'énoncer 1° on extraira la racine, à moins d'une unité, de 85432 ; on obtient la partie entière 292 avec le reste 168 ; on multiplie 168 par 7 ce qui fait 1176, produit qu'on divise par 2×292 ou 584 ; le quotient est 2; on aura la racine en ajoutant $\frac{2}{7}$ à 292 (N.A.M, 1845, p. 230).

244. II. — Si le dénominateur de la fraction dont on doit extraire la racine carrée est un carré, on extrait l'entier de la racine carrée du numérateur, et l'on divise le résultat par la racine carrée du dénominateur ; si le dénominateur n'est pas un carré parfait, on le décompose en ses facteurs premiers et l'on multiplie les deux termes de la fraction par tous les facteurs du dénominateur dont l'exposant est impair ; de cette manière la nouvelle fraction aura pour dénominateur un carré parfait.

Exemple : 1° $\sqrt{\frac{79}{121}} = \frac{\sqrt{79}}{11} = \frac{8}{11}$ à moins de $\frac{1}{11}$;

Digitized by Google

$$2^\circ\ \sqrt{\frac{341}{540}}=\sqrt{\frac{341}{2^2\times3^3\times5}}=\sqrt{\frac{3\times5\times341}{2^2 3^4\times5^2}}=\frac{\sqrt{5115}}{2\times3^2\times5}=\frac{71}{90}\text{ à moins de }\frac{1}{90}.$$

§ II. — Racine cubique.

245. Une fraction irréductible ne peut être un cube que si ses deux termes sont séparément les cubes de nombres entiers.

On raisonnera comme pour le carré.

Règles.

246. *Première règle.* — Quand les deux termes d'une fraction ordinaire sont des cubes, la racine cubique de cette fraction est une autre fraction ordinaire dont chaque terme est la racine cubique du terme correspondant de la fraction proposée.

247. *Deuxième règle.* — Pour extraire la racine cubique d'un nombre à moins de $\frac{1}{n}$ près : 1° on multiplie le nombre par le cube n^3 du dénominateur n ; 2° on extrait la racine cubique entière du produit ; 3° on divise le résultat par le dénominateur n.

Ces règles correspondent aux règles pour la racine carrée et elles seront démontrées de la même manière.

Exercices.

1. Quand on élève au carré les $\frac{7}{12}$ des $\frac{5}{8}$ d'un nombre, on obtient $42\ \frac{8115}{24336}$. Quel est le nombre ?
2. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction soit un carré parfait, c'est que le produit de deux termes soit un carré parfait.
3. Calculer la racine cubique de chacune des fractions suivantes $\frac{1331}{357911}$, $\frac{1248}{2800}$.
4. Calculez à moins de $\frac{1}{30}$ d'abord la racine carrée, puis la racine cubique des nombres 47, $\frac{9}{11}$, $18\frac{1}{2}$.

CHAPITRE VI.

Généralisation de la théorie des fractions.

248. On a vu que le quotient de deux nombres entiers peut être représenté par une fraction qui a pour numérateur le dividende, et pour dénominateur le diviseur (**91**) ; on peut aussi employer la même notation pour représenter le quotient de deux nombres fractionnaires ; c'est ainsi que le quotient de $\frac{3}{4}$ par $\frac{6}{7}$ est indifféremment représenté par

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{7} \text{ ou bien } \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{6}{7}\right)};$$

Digitized by Google

et l'on applique la dénomination de fraction à de semblables quotients.

Il est clair qu'une fraction de ce genre est toujours réductible à une fraction à termes entiers ; en effet, la fraction qui sert d'exemple vaut $\frac{3}{4} \times \frac{7}{6} = \frac{21}{24}$ ou $\frac{7}{8}$.

249. Toutes les règles du calcul des fractions ordinaires à termes entiers s'appliquent, sans exception, à celui des fractions généralisées à termes fractionnaires; c'est ce que nous démontrons ici pour deux cas.

1° Une fraction généralisée ne change pas de valeur quand on multiplie ou qu'on divise les deux termes par un même nombre entier ou fractionnaire.

Démonstration. — Considérons la fraction généralisée ci-dessus ; sa valeur réduite est $\frac{7}{8}$; par suite $\frac{3}{4} = \frac{7}{8} \times \frac{6}{7}$, donc aussi $(\frac{5}{11} \times \frac{3}{4}) = \frac{7}{8} \times (\frac{5}{11} \times \frac{6}{7})$; ce qui démontre que $\frac{7}{8}$ est aussi le quotient de $\frac{5}{11} \times \frac{3}{4} : \frac{5}{11} \times \frac{6}{7}$.

On déduit de ce principe les règles pour réduire des fractions au même dénominateur, donc pour l'addition et la soustraction des fractions.

250. 2° On obtient le produit de deux fractions en les multipliant terme à terme.

Démonstration. — Soient les deux fractions $\frac{(\frac{3}{4})}{(\frac{6}{7})} = \frac{3\times7}{4\times6}$ et $\frac{(\frac{5}{11})}{(\frac{7}{13})} = \frac{5\times13}{11\times7}$; le produit sera $\frac{3\times7\times5\times13}{4\times6\times11\times7} = \frac{(\frac{3\times5}{4\times11})}{(\frac{6\times7}{7\times13})} = \frac{(\frac{3}{4}) \times (\frac{5}{11})}{(\frac{6}{7}) \times (\frac{7}{13})}$.

251. On peut aussi déduire de ces principes les règles pour toutes les opérations sur les fractions généralisées.

SECTION II.

Fractions décimales[1].

252. On sait qu'un nombre décimal est un nombre qui se compose de une ou plusieurs parties *sous-décuples* de l'unité ; on peut dire aussi que c'est une fraction ordinaire dont le dénominateur est une puissance de 10.

Pour les fractions décimales, le dénominateur ne doit pas être écrit ; cela résulte de l'heureuse extension qu'on a faite du principe fondamental de la numération des nombres entiers (**17**).

1. On trouvera à l'appendice IV l'exposé du système métrique et décimal des poids et mesures pour lequel on emploie ce genre de fractions.

Digitized by Google

CHAPITRE I.

Addition et soustraction.

RÈGLES.

253. *Première règle.* — Pour additionner les nombres décimaux : 1° on les place les uns sous les autres, de manière que les unités du même ordre soient placées dans une même colonne (alors toutes les virgules sont aussi dans une colonne); 2° on fait l'addition des colonnes successives comme pour les nombres entiers ; 3° la somme étant trouvée, on place une virgule dans la colonne des virgules.

La démonstration est la même que pour l'addition des nombres entiers ; si les premiers chiffres à droite ne sont pas dans la même colonne comme pour ceux-là, c'est que les chiffres dont il s'agit n'expriment pas des unités du même ordre. Il est inutile de réduire les fractions décimales au même dénominateur comme les fractions ordinaires, parce que dans le cas des fractions décimales, on additionne séparément les fractions qui ont le même dénominateur (unités décimales du même ordre).

254. *Deuxième règle.* — Pour soustraire un nombre décimal d'un nombre décimal : 1° on place le premier sous le second, de manière que les unités du même ordre soient placées dans la même colonne (alors les deux virgules sont aussi dans une même colonne) ; 2° on opère ensuite la soustraction par colonnes successives, comme pour les nombres entiers ; si l'un des termes a moins de chiffres décimaux que l'autre, on suppose qu'il y ait des zéros à la place des décimales qui manquent ; 3° le reste étant trouvé, on place une virgule dans la colonne des virgules.

Même démonstration que pour l'addition.

CHAPITRE II.

Multiplication et élévation aux puissances.

RÈGLES.

255. *Première règle.* — Pour multiplier un nombre décimal par un nombre décimal, on opère comme si les nombres étaient entiers, en faisant abstraction des virgules ; et l'on sépare, sur la droite du produit obtenu, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs réunis.

Digitized by Google

Démonstration. — $2,3 \times 3,45 = 7,935$; en effet multiplier 3,45 par 2,3 ou par 23 dixièmes, c'est prendre 23 fois la dixième partie de 3.45 ou 345 centièmes ; le 10me de 345 centièmes est 345 millièmes, et 23 fois cette 10me partie font 23×345 millièmes = 7935 millièmes = 7,935.

On peut dire aussi $2,3 \times 3,45 = \frac{23}{10} \times \frac{345}{100} = \frac{23 \times 345}{10 \times 100} = \frac{7935}{1000} = 7,935.$

REMARQUES.

256. I. - Si l'un des facteurs est un nombre entier, le produit a autant de chiffres décimaux que le facteur fractionnaire. Si l'un des facteurs est une puissance de 10, il suffit, pour obtenir le produit, de reculer la virgule de l'autre facteur d'autant de rangs vers la droite qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance de 10.

257. II. — Le principe de l'interversion des facteurs existe aussi pour les nombres décimaux.

258. *Deuxième règle.* — Pour élever un nombre décimal à une puissance donnée, on agit comme s'il n'y avait pas de virgule, mais on sépare à la droite du résultat autant de chiffres décimaux qu'il est indiqué par le produit de l'exposant et de la quotité de chiffres décimaux du nombre proposé.

Exemple. — $(3,21) = 3,21 \times 3,21 \times 3,21 = 33,076161.$

259. *Remarque.* — Un carré a un nombre de chiffres décimaux double de celui des chiffres décimaux de la racine ; et un cube a un nombre de chiffres décimaux triple.

CHAPITRE III.

Division.

RÈGLES.

260. *Première règle.* — Pour diviser un nombre décimal par une puissance de 10, on recule la virgule du dividende d'autant de rangs vers la gauche qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance de 10 (**27**).

261. *Deuxième règle.* — Pour diviser un nombre décimal par un nombre entier, on divise le dividende par le diviseur, en faisant comme s'il n'y avait pas de virgule, et l'on sépare à la droite du quotient trouvé autant de chiffres décimaux qu'il y en a au dividende.

Digitized by Google

Démonstration. — Soit à diviser 3123,032 ou 3123032 millièmes par 17, c'est chercher le nombre qui, multiplié par le diviseur 17 produise le dividende 3123032 millièmes ; il faut donc diviser 3123032 par 17 ; et comme le quotient exprime des millièmes il faudra séparer 3 chiffres décimaux à la droite de ce résultat. On peut aussi raisonner comme suit : $3123{,}032 : 17 = \frac{3123032}{1000} : 17 = \frac{3123032 : 17}{1000}$.

262. *Remarque.* — Il arrive fort souvent qu'on ne doit calculer le quotient qu'avec un certain nombre de chiffres décimaux; par exemple, pour une somme d'argent, il suffit de la déterminer jusqu'aux centimes ; pour la longueur d'une pièce d'étoffe, jusqu'aux centimètres ; pour le poids des denrées ordinaires, jusqu'aux grammes; pour le volume des maçonneries, jusqu'aux décimètres cubes, etc. Il ne faut alors calculer que deux ou trois chiffres décimaux du quotient, et l'on opérera comme suit : s'il y a au dividende plus de chiffres décimaux qu'il ne doit y en avoir au quotient, on négligera sur la droite les chiffres décimaux de trop ; et s'il n'y a pas assez de chiffres décimaux, on écrira à la droite du dividende autant de zéros qu'il en faut pour qu'on ait le nombre demandé de chiffres décimaux. On peut calculer de la même manière, avec autant de chiffres décimaux qu'on veut, le quotient de deux nombres entiers.

263. *Troisième règle.* — Pour diviser un nombre décimal par un nombre décimal, on recule la virgule du dividende d'autant de rangs vers la droite qu'il y a de chiffres décimaux au diviseur, puis on supprime la virgule du diviseur ; on achève enfin l'opération d'après la deuxième règle.

Démonstration. — Soit à diviser 27,375 par 6,5 ; on doit calculer le nombre qui multiplié par le diviseur 6,5 ou 65 dixièmes produise le dividende 27,375 ; donc on peut dire :

les 65 dixièmes du quotient font $27{,}375$

1 dixième » fait $\frac{27{,}375}{65}$

et 10 dixièmes » font $10 \times \frac{27{,}375}{65} = \frac{273{,}75}{65}$

ou bien $27{,}375 : 6{,}5 = \frac{27375}{1000} : \frac{65}{10} = \frac{10}{65} \times \frac{27375}{1000} = \frac{273{,}75}{65}$.

REMARQUES.

264. I. — Si le nombre des chiffres décimaux est le même au dividende qu'au diviseur, on est ramené à diviser l'un par l'autre deux nombres entiers ; s'il y a moins de chiffres décimaux au dividende qu'au diviseur, on complète les chiffres décimaux du dividende au moyen de zéros.

Digitized by Google

265. II. — Il y a une règle fort simple pour trouver le quotient de la division de deux nombres décimaux, à moins d'une unité décimale donnée; la voici [1] :

1° On recule la virgule dans le dividende d'autant de rangs vers la droite qu'on veut obtenir de chiffres décimaux au quotient : la comparaison de la partie entière du dividende avec celle du diviseur permet de déterminer facilement le nombre des chiffres de la partie entière du nouveau quotient; 2° on conserve sur la gauche du diviseur autant de chiffres plus un ou plus deux qu'il doit y en avoir au quotient, et l'on sépare, sur la gauche du dividende, autant de chiffres qu'il en faut pour que la partie séparée à gauche contienne la partie séparée du diviseur ; 3° on divise l'un par l'autre les deux nombres ainsi formés; 4° on multiplie la partie séparée à gauche du diviseur par le quotient, et l'on retranche le produit de la partie à gauche du dividende ; 5° on sépare un chiffre sur la droite du diviseur partiel, on divise le reste par ce nouveau diviseur et l'on retranche le produit du premier reste ; 6° on barre encore un chiffre au diviseur, on divise le second reste par ce nouveau diviseur et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 2 ou 3 chiffres du diviseur, suivant qu'on avait conservé un ou deux de plus qu'il doit y en avoir au quotient : le quotient obtenu sera le quotient exact si le dernier reste est plus grand que la somme des chiffres du quotient et, dans le cas contraire, il pourra être trop fort d'une unité.

Exemple. — Déterminons à un dix-millième près le quotient 35,7648976489 : 8,976352763. Nous reculons la virgule de 4 rangs vers la droite au dividende; il est facile de voir que la partie entière du nouveau quotient aura 5 chiffres ; nous prenons ensuite, sur la gauche du diviseur 6 chiffres et 7 au dividende et nous continuons l'opération d'après la règle qui vient d'être établie ; le quotient demandé est 3,9843.. ...

3 5 7 6 4 8,9'76	8,'9'7'6'3'5'2 7 6 3
8 8 3 5 8 4	
7 5 7 1 7	
3 9 0 9	3,9 8 4 3 6
3 2 1	
5 4	
6	

1. Voir *la Revue de l'instruction publique*, 1874, p. 287 (méthode de A. Cambier, inspecteur de l'enseignement moyen), et les N. A. M, 1857, p. 152.

Digitized by Google

En comparant ce procédé à celui qu'on suit dans la division ordinaire, il est facile de s'assurer que les chiffres successifs du quotient sont obtenus en séparant sur la droite du dividende et du diviseur le même nombre de chiffres. A chaque division partielle on en sépare un de plus que dans la division précédente.

MÉTHODE ORDINAIRE.

```
3 5 7 6 4 8 9 7 6 4 8,9 0 0 0 | 8 9 7 6 3 5 2 7 6 3
2 6 9 2 9 0 5 8 2 8 9         |
  8 8 3 5 8 3 9 3 5 9 9       |
  3 0 7 8 7 1 7 4 8 6 7       | 3,9 8 4 3 . . . .
  7 5 7 1 2 1 8 7 3 2 0
  7 1 8 1 0 8 2 2 1 0 4
    3 9 0 1 3 6 5 2 1 6 0
    3 5 9 0 5 4 1 1 0 5 2
      3 1 0 8 2 4 1 1 0 8 0
      2 6 9 2 9 0 5 8 2 8 9
        4 1 5 3 3 5 2 7 9 1
```

Les différents restes qu'on obtient surpassent les restes véritables des différents produits qu'on a omis de retrancher, mais dont on peut avoir une limite supérieure. Ainsi dans la première soustraction on a omis de retrancher du dividende le produit, par 3, de toute la partie du diviseur qui suivait le chiffre 5; or, cette partie vaut moins que 0,00001; donc le reste n'est pas trop fort de 0,00003. On trouverait de même que le second reste n'est pas trop fort de 0,00012; et le troisième reste de 0,00021; et, en général, les restes de ordre la division abrégée ne surpassent pas les restes véritables de plus d'unités du dernier qu'il n'en est marqué par la somme des chiffres du quotient; de sorte que si le dernier diviseur est plus grand que la somme des chiffres du quotient, on obtiendra le quotient exact quand le dernier reste sera plus grand que la somme des chiffres du quotient; dans le cas contraire, le quotient pourra être trop fort d'une unité; ainsi, dans la division choisie, le dernier reste 6, étant moindre que la somme des chiffres du quotient, le dernier chiffre 6 pourrait être trop fort, mais le quotient exact, à moins d'un dix-millième, est bien 3,9843.

266. *Quatrième règle.* — Pour diviser un nombre entier par un nombre décimal, on écrit à la droite du dividende autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux au diviseur; on supprime la virgule du diviseur et l'on est ramené à diviser un nombre entier par un nombre entier.

Même démonstration que précédemment.

CHAPITRE IV.

Extraction de la racine.

§ I. — RACINE CARRÉE.

267. *Règle.* — Pour calculer, à moins de $\frac{1}{10^n}$, la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire : 1° on multiplie le nombre proposé par 10^{2n} et l'on évalue les unités du produit à moins

Digitized by Google

d'une unité près; 2° on extrait la racine carrée de ces unités du produit; 3° on sépare n chiffres décimaux sur la droite du résultat.

Démonstration. — On demande d'évaluer $\sqrt{2}$ à moins de 0,0001; multiplions 2 par 10^8, ce qui donne 200000000; puis, de ce résultat, extrayons la racine carrée à moins d'une unité; il vient 14142; on peut donc écrire

$$14142^2 < 200000000 < 14143^2$$

et en divisant tous les termes par 10^8,

$$14142^2 : 10^8 < 2 < 14143^2 : 10^8$$

ou bien $$(14142 : 10^4)^2 < 2 < (14143 : 10^4)^2$$

donc enfin $$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

et 1,4142 est bien, à moins de 0,0001, la valeur de $\sqrt{2}$.

On trouverait de même que $\sqrt{\frac{5}{7}} = 0,345$ et $\sqrt{795,831} = 28,210$ à moins de 0,001.

§ II. — RACINE CUBIQUE.

268. *Règle.* — Pour calculer, à moins de $\frac{1}{10^n}$, la racine cubique d'un nombre entier ou fractionnaire : 1° on multiple le nombre proposé par 10^{3n} et l'on évalue les unités du produit ; 2° on extrait, à moins d'une unité, la racine cubique de ces unités du produit; 3° on sépare n chiffres décimaux sur la droite du résultat.

La démonstration peut se faire comme pour la racine carrée; ou trouvera ainsi que $\sqrt[3]{3} = 1,25$, $\sqrt[3]{\frac{4}{7}} = 0,89$, $\sqrt[3]{795,831} = 9,26$, à moins de 0,01 près.

EXERCICES.

1. Calculez, à moins de 0,01, la racine cubique de $15 + \sqrt{17}$ puis la racine carrée de $17 + \sqrt[3]{11}$.

2. On peut acheter pour 12,50 fr. autant de mètres de toile qu'on doit donner de francs pour deux mètres. Combien de mètres de cette toile peut-on acheter pour 25 francs ?

3. Paul et Jacques font l'échange de deux propriétés de forme carrée. La propriété donnée par Paul a une superficie de 10 hect , 56 a., 25 c. et vaut 3200 fr. l'hect. ; celle que donne Jacques vaut 3650 fr. l'hect. et a un côté de 43 mètres moins long que le côté de l'autre carré. On demande s'il y aura une soulte et par qui elle devra être payée pour que l'échange soit équitable.

4. On sait que le carré construit sur la diagonale d'un carré vaut le double de celui-ci ; d'après cela, calculer, à un mètre près, la diagonale d'un carré dont le côté a 2,75 m. de longueur.

Digitized by Google

5. Le volume d'une sphère est 185, 382836 m. cubes ; calculer son rayon à moins d'un millimètre, sachant que la formule qui donne le volume, connaissant le rayon R, est $\frac{4}{3}\pi R^3$ ($\pi = 3, 142$).

6. Calculez un nombre, à moins d'une unité, sachant que la différence entre son cube et son carré est 501801.

CHAPITRE V.

Conversion réciproque des fractions ordinaires et décimales.

§ I. — CONVERSION DES FRACTIONS ORDINAIRES EN DÉCIMALES.

269. *Définition.* — Convertir une fraction ordinaire en décimale, c'est calculer une fraction décimale qui soit équivalente à la fraction ordinaire, ou qui n'en diffère que d'une unité décimale donnée.

270. *Règle.* — Pour convertir une fraction ordinaire en décimale, on divise le numérateur par le dénominateur d'après la règle du n° **262**.

Démonstration. — $\frac{137}{80} = 1,7125$; en effet $\frac{137}{80} = 137 : 80$ (**90**) $= 1,7125$. En divisant 137 par 80 on obtient le quotient entier 1 et le reste 57 entiers ou 570 dixièmes ; en divisant 570 dixièmes par 80, on obtient le quotient 7 dixièmes avec le reste 10 dixièmes ou 100 centièmes ; 100 centièmes : 80 = 1 centième pour quotient et 20 centièmes ou 200 millièmes pour reste. (Note XXVII).

REMARQUES.

271. I. — Voici une application de cette règle : dans la pratique, quand on doit extraire la racine carrée d'une fraction ordinaire, on convertit d'abord celle-ci en une fraction décimale.

Par exemple : soit à extraire à moins d'un millième, la racine carrée de $\frac{5}{7}$; on écrira $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{0,714285...} = 0,845...$

272. II. — Quand la conversion donne un nombre décimal avec un nombre limité de chiffres décimaux, on dit qu'elle donne un *nombre décimal exact* et alors la fraction ordinaire est équivalente à cette fraction décimale. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un nombre décimal exact, c'est que le dénominateur de la fraction ordinaire réduite à sa plus simple expression ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.

Démonstration. — Cette condition est *nécessaire ;* en effet, soit la fraction irréductible $\frac{7}{60}$ dont le dénominateur est divisible par le facteur 3 différent de 2 et 5 ; quelle que soit la fraction équivalente, le dénominateur sera un multiple de 60 (**174**) et ce multiple

Digitized by Google

ne peut être équivalent à une puissance de 10 qui ne renferme que le facteur 2 et 5, dont il n'y a pas de nombre décimal exact qui puisse être équivalent à la fraction ordinaire $\frac{7}{60}$.

La condition est *suffisante ;* en effet, soit la fraction irréductible $\frac{127}{800}$ dont le dénominateur se décompose en $2^5 \times 5^2$; on a $\frac{127}{800} = \frac{127}{2^5 \times 5^2} = \frac{127 \times 5^3}{2^5 \times 5^5} = \frac{15875}{10^5}$; c'est un nombre décimal ayant 5 chiffres décimaux, c'est-à-dire autant de chiffres décimaux qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant des facteurs 2 et 5.

273. III. — Quand la conversion ne donne pas un nombre décimal exact, on obtient un nombre décimal qui se compose d'un nombre infini de chiffres décimaux dont un ou plusieurs consécutifs se reproduisent indéfiniment et dans le même ordre ; un tel nombre s'appelle une *fraction décimale périodique* ; le nombre formé par les chiffres qui se reproduisent est la *période*. Une fraction décimale périodique est *simple* ou *mixte* suivant que la période commence ou non au chiffre des dixièmes. La fraction ordinaire qui donne naissance à une fraction décimale périodique s'appelle sa *génératrice*.

274. On démontre facilement que toute fraction ordinaire, non convertible en une fraction décimale exacte, conduit à une fraction périodique ; en effet, soit par exemple à convertir $\frac{4}{7}$; on doit diviser par 7 successivement 40, 50, 10.... C'est-à-dire chaque reste suivi d'un zéro ; or les restes sont tous plus petits que 7 et différents de zéro ; on ne peut donc pas obtenir plus de 6 restes différents, de sorte qu'après 6 opérations tout au plus, il vient nécessairement un reste déjà obtenu précédemment ; à côté de ce reste on met encore un zéro, ce qui forme un dividende précédent, puis le même quotient et le même reste, etc.

§ II. — FORMATION DE LA FRACTION GÉNÉRATRICE D'UN NOMBRE DÉCIMAL.

RÈGLES.

275. *Première règle.* — Un nombre décimal exact est équivalent à une fraction ordinaire qui a pour numérateur le nombre décimal sans virgule ; et pour dénominateur une puissance de 10 dont l'exposant est égal au nombre des chiffres décimaux.

Exemples. — 1° 0,517 = $\frac{517}{1000}$; 2° 79,34 = $\frac{7934}{100}$ ou 79 $\frac{34}{100}$ = 79 $\frac{17}{50}$.

276. *Deuxième règle.* — Une fraction périodique simple a pour génératrice une fraction ordinaire dont le numérateur est une fois la période et dont le dénominateur est un nombre

Digitized by Google

qui se compose d'autant de fois le chiffre 9, qu'il y a de chiffres dans la période.

Démonstration. — Soit la fraction décimale périodique simple 0,5757..... dont la période est 57 : on a d'abord $57 = 100 \times 0{,}57 = 99 \times 0{,}57 + 0{,}57$;

donc $\frac{57}{99} = 0{,}57 + \frac{0{,}57}{99}$;

puis $\frac{0{,}57}{99} = 0{,}0057 + \frac{0{,}0057}{99}$;

$\frac{0{,}0057}{99} = 0{,}000057 + \frac{0{,}000057}{99}$;

. . . . . .

En additionnant membre à membre et réduisant

$$\frac{57}{99} = 0{,}575757\ldots + \frac{0{,}000057}{99}.$$

Il est ainsi démontré que $\frac{57}{99}$ est la fraction génératrice de 0,575757... ; en même temps on voit que la différence entre la fraction génératrice et la fraction décimale périodique est d'autant plus petite qu'on prend un plus grand nombre de périodes [1].

REMARQUES.

277. I. — $\frac{57}{99} = \frac{101 \times 57}{101 \times 99} = \frac{5757}{9999}$; on démontrerait d'une manière analogue que $\frac{57}{99} = \frac{5757}{9999} = \frac{575757}{999999}$; on voit ainsi qu'on peut supposer que la période se compose de plusieurs fois la période primitive, et la fraction génératrice aura toujours la même valeur.

278. II. — Si fraction périodique a une partie entière on obtient la fraction génératrice en prenant pour numérateur un nombre composé de la partie entière suivie d'une période moins la partie entière, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.

Démonstration. — Soit la fraction périodique simple avec une partie entière 167,036036 ... = 167 + 0,036036 ... ; la fraction génératrice sera évidemment $167 + \frac{36}{999} = \frac{999 \times 167 + 36}{999} = \frac{1000 \times 167 + 36 - 167}{999} = \frac{167036 - 167}{999}$; cette formule démontre la règle.

En effectuant la soustraction indiquée au numérateur, on a $\frac{166869}{999}$ et en divisant les deux termes par 9 on a $\frac{18541}{111}$.

---

1. L'étude des fractions périodiques est assez difficile pour les commençants ; elle exige la connaissance des *limites des grandeurs variables* qui doit être réservée pour les classes supérieures. (Note XXVIII.)

Digitized by Google

279. III. Le dénominateur de la fraction génératrice d'une fraction périodique simple est premier avec 10, car avant la réduction il est terminé par un 9; et la réduction à la plus simple expression n'introduit pas les diviseurs de 10.

280. *Troisième règle.* — Une fraction périodique mixte a pour fraction génératrice une fraction ordinaire, dont le numérateur est un nombre composé de la partie non périodique suivie d'une période moins la partie non périodique, et dont le dénominateur est un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.

Démonstration. — Soit la fraction périodique mixte 9, 23457457 ...; considérons la fraction 923,457457 ... qui est 100 fois plus grande que la fraction proposée; la fraction génératrice est (**278**) $\frac{923457 - 923}{999}$; donc la génératrice de la fraction 9,23457457.... sera le 100e de ce résultat ou bien $\frac{923457-923}{99900} = \frac{922534}{99900} = \frac{461267}{49950}$.

REMARQUES.

281. I. — On a aussi $\frac{923457 - 923}{99900} = \frac{923457000 - 923000}{99900000}$ $= \frac{923457457 - 923457}{99900000}$; ce qui démontre qu'on peut comprendre une ou plusieurs périodes dans la partie non périodique. Ensuite si l'on additionne terme à terme les deux premières fractions, ce qui donne une fraction équivalente, car les deux termes sont encore des équimultiples des termes de la fraction irréductible équivalente $\frac{923457000 - 923000 + 923457 - 923}{99999900}$ $= \frac{923457000 - 923000 + 923000 + 457 - 923}{99999900} = \frac{923457457 - 923}{99999900}$; on voit ainsi qu'au lieu de la période 457 on peut prendre la période 457457 composée de deux fois la première.

282. II. — Quand la génératrice d'une fraction périodique mixte a été réduite à sa plus simple expression : 1° son dénominateur renferme toujours l'un des facteurs de 10 avec d'autres facteurs premiers; 2° le plus grand exposant de ces facteurs de 10 est précisément égal au nombre des chiffres de la partie non périodique.

Digitized by Google

Démonstration. — 1° En effet, avant la réduction, le numérateur de la génératrice *n'est jamais terminé par un zéro,* car sinon la période commencerait plus tôt ; si le numérateur est terminé par 5, il n'est pas divisible par 2 et, en simplifiant la génératrice, le dénominateur conservera le facteur 2 ; si le numérateur est terminé par un des chiffres pairs 2, 4, 6, 8, il est divisible par 2, mais il ne l'est pas par 5 et, en simplifiant la génératrice, le dénominateur conservera le facteur 5 ; enfin, si le numérateur est terminé par les chiffres impairs 1, 3, 7, 9, il n'est divisible ni par 2, ni par 5, et le dénominateur conservera les deux facteurs. 2° Après toute simplification, la fraction génératrice conserve le même nombre des facteurs 2 ou 5 ; or, il y a autant de facteurs 2 et 5 qu'il y avait de zéros avant la simplification, c'est-à-dire autant qu'il y a de chiffres non périodiques, donc ...

283. III. Il résulte de ce qui précède que si l'on convertit une fraction ordinaire irréductible en fraction décimale, on obtiendra :

1° Une fraction décimale d'un nombre limité de chiffres décimaux, si le dénominateur de la fraction ordinaire n'a pas d'autres diviseurs que ceux de 10 ; et le plus grand exposant de ces facteurs du dénominateur indiquera le nombre des chiffres décimaux ;

2° Une fraction périodique simple si le dénominateur est premier avec 10 ;

3° Une fraction périodique mixte si le dénominateur n'est pas premier avec 10 et s'il renferme encore d'autres facteurs ; dans ce cas le nombre des chiffres de la partie non périodique est égal au plus grand exposant des facteurs 2 et 5 du dénominateur.

§ III. — CALCUL DES FRACTIONS PÉRIODIQUES.

284. On a vu que les opérations sur les nombres décimaux s'exécutent identiquement de la même manière que celles relatives aux nombres entiers, tandis que le calcul des fractions ordinaires est beaucoup moins simple. Aussi, dans la pratique, sera-t-il bon de n'avoir à opérer que sur des nombres décimaux ; c'est pour ce motif que, s'il se présente des fractions ordinaires, on les évalue en décimales, soit exactement, soit approximativement ; et l'on opère ensuite sur ces nombres décimaux, en tenant compte de l'approximation avec laquelle on les a déterminés. Cette question rentre dans la théorie des *approximations numériques* dont nous n'avons pas à nous occuper d'une manière générale dans ce cours. Nous donnons seulement ici quelques procédés pour le calcul des fractions périodiques sans recourir aux génératrices.

285. 1° Considérons deux fractions périodiques simples, moindres que l'unité, dont les périodes ont le même nombre de chiffres et telles qu'en additionnant une période de l'une des fractions avec une période de l'autre fraction la somme soit inférieure à 10 unités de l'ordre le plus élevé.

Digitized by Google

Exemple. — $\frac{53}{99} = 0,5353 \ldots$ et $\frac{2}{11}$ ou $\frac{18}{99} = 0,1818 \ldots$;

on aura $\frac{53}{99} + \frac{18}{99} = \frac{71}{99} = 0,7171 \ldots$;

et $\frac{53}{99} - \frac{18}{99} = \frac{35}{99} = 0,3535 \ldots$;

on peut obtenir ces résultats en effectuant les mêmes opérations sur les périodes.

286. 2° Les périodes ont le même nombre de chiffres, mais la somme de deux périodes n'est pas inférieure à 10 unités de l'ordre le plus élevé.

Exemple. — $\frac{9}{37} = \frac{243}{999} = 0,243243 \ldots$ et $\frac{875}{999} = 0,875875 \ldots$

On a $\frac{243}{999} + \frac{875}{999} = \frac{1118}{999} = \frac{1119 - 1}{999} = 1,119119 \ldots$;

on peut obtenir ce résultat en additionnant les périodes puis en augmentant le dernier chiffre à droite de *un*.

287. 3° Soient deux périodiques simples plus grandes que l'unité ; les périodes ont encore le même nombre de chiffres.

Exemple. — $\frac{182}{9} = 20,222 \ldots$ et $\frac{37}{9} = 4,111 \ldots$

On a $\frac{182}{9} + \frac{37}{9} = \frac{219}{9} = \frac{243 - 24}{9} = 24,33 \ldots$;

et $\frac{182}{9} - \frac{37}{9} = \frac{145}{9} = \frac{161 - 16}{9} = 16,111 \ldots$;

on peut obtenir ces résultats en effectuant les mêmes opérations sur les parties entières et sur les périodes.

Soient encore les fractions :

$$\frac{585}{11} = \frac{5265}{99} = 53,1818 \ldots ; \text{ et } \frac{2756}{99} = 27,8383 \ldots$$

On a $\frac{5265}{99} + \frac{2756}{99} = \frac{8021}{99} = \frac{8102 - 81}{99} = 81,0202 \ldots$

$$\frac{5265}{99} - \frac{2756}{99} = \frac{2509}{99} = \frac{2534 - 25}{99} = 25,3434 \ldots$$

on peut obtenir ces résultats en opérant sur les fractions décimales seulement : pour l'addition on augmente le dernier

Digitized by Google

chiffre à droite de un, et pour la soustraction on diminue ce chiffre de un.

288. 4° Si les fractions périodiques simples ont des périodes composées d'un nombre différent de chiffres, on cherchera le moindre multiple des nombres de chiffres dont se compose chaque période ; ce moindre multiple indiquera combien de chiffres on prendra dans chaque périodique pour former une période.

Exemple. — Soient les fractions :

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = 0{,}666 \ldots \text{ et } \frac{9}{37} = \frac{243}{999} = 0{,}243243 \ldots$$

On a $\frac{6}{9} + \frac{243}{999} = \frac{666}{999} + \frac{243}{999} = \frac{909}{999} = 0{,}909909 \ldots$

et $\frac{6}{9} - \frac{243}{999} = \frac{666}{999} - \frac{243}{999} = \frac{423}{999} = 0{,}423423 \ldots$

Le moindre multiple de 1 et 3 est 3 ; on prendra donc 3 chiffres dans chaque période.

289. 5° Soient des fractions mixtes avec des parties non périodiques composées du même nombre de chiffres.

Exemple. $\frac{11447}{450} = \frac{22894}{900} = \frac{25437 - 2543}{900} = 25{,}43777\ldots$

et $\frac{74449}{9900} = \frac{75201 - 752}{9900} = 7{,}520101\ldots$

il vient $\frac{22894}{900} + \frac{74449}{9900} = \frac{251834 + 74449}{9900} = \frac{326283}{9900}$ $= 32{,}957878\ldots$ on opère comme pour les périodiques simples.

290. 6° Soient des fractions mixtes avec des parties non périodiques composées de nombres différents de chiffres.

Exemple. — $\frac{2051}{4950} = \frac{4102}{9900} = \frac{4143 - 41}{9900} = 0{,}414343\ldots$

$$\frac{23}{90} = \frac{25-2}{90} = 0{,}2555\ldots$$

Multiplions les deux fractions par 10^2 (parce qu'il y a 2 chiffres dans la partie non périodique avec le plus grand nombre de chiffres) il vient :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4102}{99} = 41{,}4343\ldots \\ \frac{230}{9} = 25{,}5555\ldots\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ou} \\ \text{bien}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\frac{4102}{99} = 41{,}4343.. \\ \frac{2530}{99} = 25{,}5555\end{array}\right.$$

Digitized by Google

donc $$\frac{4102}{99} + \frac{2530}{99} = 66,9898...,$$

ou bien $$\frac{2051}{4950} + \frac{23}{90} = 0\ 669898...$$

De même $$\frac{2051}{4950} - \frac{23}{90} = 0,15878787...$$

291. 7° Quand deux fractions périodiques simples ont le même nombre de chiffres dans la période, on obtient le quotient de leur division en divisant une période du dividende par une période du diviseur.

Exemple. — $\frac{53}{99} : \frac{2}{11} = 0,5353... : 0,1818... = \frac{53}{18} = 2,944...$

S'il n'y a pas le même nombre de chiffres dans la période on opérera comme au n° 288.

Exemple. —

$$\frac{2}{3} : \frac{9}{37} = 0,66... : 0.243243. — = \frac{666}{243} = 2,740740...$$

292. 8° Quand il s'agit de fractions périodiques mixtes on opérera d'après les principes du n° 290.

EXERCICES[1].

1. Convertir, en fractions décimales, les fractions ordinaires $\frac{9}{32}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{13}{20}$; $\frac{7}{11}$, $\frac{44}{91}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{47}{360}$; $\frac{49}{24}$, $\frac{181}{143}$.

2. Déterminer les fractions ordinaires équivalentes aux fractions décimales exactes 0,35 ; 3,0145 ; 0,0001024.

3. Déterminer les fractions génératrices des fractions périodiques suivantes : 0,55... ; 3,4747... ; 5,004004... ; 2,3566... ; 17,84031031...

4. Calculer la valeur des expressions suivantes :

1° 5,22... + 8,44... — 9,66... ;
2° 7,33. . + 18,0101... — 5,451010... ;
3° 9,544... × 0,0303... ;
4° 18,0122... : 3,0101...

5. Calculez la valeur exacte de la formule suivante :

$$\frac{5,666... + 18,45151...}{13,02323... - 8,2155...}.$$

6. Parmi les fractions $\frac{7}{17}$, $\frac{19}{28}$, $\frac{18}{25}$, quelle est celle qui donne naissance à une fraction décimale non périodique, celle qui donne une fraction périodique simple enfin celle qui donne une fraction périodique mixte? Dire pour ces dernières, le nombre des chiffres de la période.

---

1. On trouvera un grand nombre d'applications dans les N.A.M. (année 1845, p. 109 et 126; 1871, p 39 et 92; 1874, p. 569 et 571; 1875, p. 229 et dans la M. année 1874, p. 8 et 81.

Digitized by Google

7. Étant donné un nombre impair quelconque qui ne soit pas divisible par 5, trouver un nombre tel que le produit de celui-ci par le nombre impair donné soit formé de la répétition du même chiffre assigné d'avance (B.A.B., année 1863, p. 62).

8. Démontrer les principes suivants :

1° Quand l'ensemble de la partie entière et de la partie décimale d'une fraction périodique simple présente une période commençant avant la virgule, le numérateur de la fraction génératrice a un zéro à sa droite.

2° Si deux fractions irréductibles ont le même dénominateur et si l'on réduit l'une et l'autre en décimales, les périodes auront le même nombre de chiffres.

3° Si l'on réduit en décimales une fraction ordinaire et que la période ait un chiffre de moins qu'il y a d'unités dans le dénominateur ; si l'on range ces chiffres de la période en cercle de manière qu'il n'y ait plus ni premier, ni dernier chiffre, le cercle ainsi obtenu sera indépendant du numérateur de la fraction ordinaire.

4° Si une fraction irréductible a pour dénominateur un nombre premier, et si l'on partage la période de la fraction décimale en deux moitiés qui aient le même nombre de chiffres, la somme des chiffres de même rang, dans chaque moitié, est toujours égale à 9 (N.A.M., année 1846, p. 397).

5° Quel que soit un nombre premier avec 10, il y a toujours un de ses multiples dont tous les chiffres sont des 9.

6° Quel que soit un nombre qui n'est pas premier avec 10, il y a toujours un de ses multiples dont tous les chiffres sont des 9 suivis à droite par des zéros.

SECTION III.

Nombres complexes[1].

293. On sait qu'un nombre complexe est composé de fractions rapportées à des unités qui dérivent les unes des autres d'après une loi différente de la décimale.

CHAPITRE I.

Transformations fondamentales.

RÈGLES.

294. *Première règle.* — Pour évaluer un certain nombre d'unités d'un ordre donné en unités de l'ordre immédiatement inférieur : 1° on détermine combien d'unités de l'ordre inférieur il faut pour une unité de l'ordre supérieur ; 2° on multiplie le résultat par le nombre des unités de l'espèce donnée.

Exemple. — 75 heures $= 75 \times 60' = 4500'$[2].

---

1. Le calcul a beaucoup perdu de son importance depuis l'application du système métrique ; cependant il doit être encore employé pour les mesures anglaises et pour la conversion des anciennes mesures. (Appendice IV.)

2. On connait la notation $'$, $''$, $'''$, pour désigner le mot minute, seconde, tierce.

Digitized by Google

295. *Deuxième règle.* — Pour évaluer le nombre des unités inférieures contenues dans un nombre complexe donné : 1° on transforme les unités de l'ordre le plus élevé en unités de l'ordre immédiatement inférieur ; 2° au produit, on ajoute les unités de cet ordre inférieur que comprend le nombre complexe ; 3° on opère sur le résultat comme sur les unités de l'ordre le plus élevé, etc.

Exemple. — $75^h\ 5'\ 10'' = 270310''$.
$4505'$.
$2703\ 10''$.

296. *Troisième règle.* — Pour extraire les unités supérieures d'un nombre d'unités d'un ordre donné : 1° on divise ce nombre par la quotité des unités de l'ordre donné qu'il faut pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur : la partie entière du quotient exprimera le nombre des unités de l'ordre supérieur et le reste exprimera des unités de l'ordre donné ; 2° on opère sur le quotient comme sur le nombre donné, etc.

Exemple. — $270310'' = 3^j\ 3^h\ 5'\ 10''$.

Tableau des calculs.

60) 270310''	270310'' contiennent 4505 fois 60'' ou 4505' avec un reste de 10'' ; 4505' contiennent 75 fois 60' ou 75 heures + 5' ; etc.
60) 4505' . . . 10''	
24) 75h.... 5'	
3j ... 3h	

297. *Quatrième règle.* — Pour convertir un nombre complexe en une fraction ordinaire équivalente : 1° on convertit le nombre complexe en unités de l'ordre inférieur ; le résultat est le numérateur de la fraction ordinaire ; 2° on calcule combien il faut d'unités inférieures pour une unité de l'ordre le plus élevé : ce résultat est le dénominateur de la fraction ordinaire.

Exemple. — 3 jours $3^h\ 5'\ 10'' = \frac{27031}{8640}$ de jour.

Tableau des calculs.

$3^j\ 3^h\ 5'\ 10''$	24^h
75^h	$1440'$
$4505'$	$86400''$
$270310''$	

$$3^j\ 3^h\ 5'\ 10'' = \frac{270310}{86400} = \frac{27031}{8640} \text{ de j.}$$

Digitized by Google

298. *Cinquième règle.* — Pour convertir une fraction ordinaire en un nombre complexe équivalent : 1° on divise le numérateur par le dénominateur : le quotient exprime le nombre des unités supérieures ; 2° on convertit le reste en unités de l'ordre immédiatement inférieur et l'on opère sur le produit comme on l'a fait sur le numérateur de la fraction ordinaire, etc.

Exemple. — $\frac{27031}{8640}$ de jour = 3 jours 3^h 5′ 10″.

Tableau des calculs.

8640) 27031 (3 jours
1111
8640) $\overline{26664^h}$ (3^h
744
8640) $\overline{44640'}$ (5′
1440
8640) $\overline{86400}$ (10″

299. *Sixième règle.* — Pour convertir un nombre complexe en un nombre décimal équivalent : 1° on convertit chaque collection d'unités en une fraction décimale de l'ordre immédiatement supérieur, en commençant par la droite ; 2° on ajoute les unités de cet ordre supérieur ; 3° on opère sur le résultat comme on l'a fait sur la première collection d'unités, etc.

Exemple. — 3 jours 3^h 5′ 10″ = 3,128587 ... de jour.

Tableau des calculs.

3 jours 3^h 5′ 10″
60) 10″ (0′,166 ... + 5′
60) 5,166 ... (0^h,08611 ... + 3^h
24) 3,08611 ... (0^j,128587 ... + 3^j

300. *Septième règle.* — Pour convertir un nombre décimal en un nombre complexe équivalent : 1° on convertit la fraction décimale de l'unité principale en unités de l'ordre immédiatement inférieur : la partie entière du produit sera le nombre des unités de l'ordre immédiatement inférieur ; 2° on opère sur la fraction décimale du produit comme sur celle du nombre décimal donné, etc.

Exemple. — 3,128587 jours = 3 jours 3^h 5′ 10″.

Tableau des calculs.

3^j,128587 24
3^h,086088 60
5′, 16528 60
9″, 9168 = 10″ environ.

Digitized by Google

301. Remarque. — On comprendra facilement que toutes les opérations sur les nombres complexes peuvent être remplacées par des opérations sur des fractions ordinaires ou décimales ; car on peut convertir d'abord les nombres donnés en fractions ordinaires et décimales ; puis effectuer les calculs sur ces nombres ; enfin convertir les résultats en nombres complexes. Dans certains cas, il y a des méthodes abrégées de calcul qui feront l'objet des chapitres suivants.

CHAPITRE II.

Addition et soustraction.

302. Règle. — On opère séparément sur les collections d'unités du même ordre, en commençant par les unités de l'ordre inférieur.

Exemple. —	75 heures	7′	13″
	87	15	54
	9	58	16
	103	0	49
	0	3	36
		85	168
Somme.	275h	25′	48″
—	109h	46	23
Reste.	165h	39′	25″

L'addition des secondes donne 168″ = 2′ 48″ ; on écrit 48″ et l'on retient 2′ pour les joindre aux minutes ; etc.

Quand on fait la soustraction, on trouve que 25′ — 46′ est impossible ; on retranche 46′ de 60′ ; il reste 14′ + 25′ du nombre supérieur = 39′ ; on a ainsi ajouté 60′ ou 1h au nombre supérieur et pour la compensation on doit ajouter une heure aux 109h du nombre à soustraire.

CHAPITRE III.

Multiplication, élévation aux puissances et division.

RÈGLES.

303. *Première règle.* — Pour multiplier un nombre complexe par un nombre entier, on multiplie successivement par ce nombre entier, en commençant par la droite, chaque collection d'unités du nombre complexe.

Exemple.	5 × 75h	15′	10″
		75′	50″
Produit.	376h	15′	50″

5 fois 10″ font 50″ ; 5 fois 15′ font 75′ = 1h 15′ ; 5 fois 75h font 375h + 1h = 376h.

Digitized by Google

304. Remarque. — Quand le multiplicateur est un nombre assez grand et qu'il peut être décomposé, on multiplie successivement le multiplicande par chacun des facteurs du multiplicateur.

Exemple. — $140 \times 36^h\ 17'\ 39''$ ou $4 \times 5 \times 7 \times 36^h\ 17'\ 39'' = 5081^h\ 11'$

$$\begin{array}{r} 4 \times\ 36^h\ 17'\ 39'' \\ \hline 70'\ 156'' \\ 5 \times 145^h\ 10'\ 36'' \\ \hline 50'\ 180'' \\ 7 \times 725^h\ 53'\ \ '' \\ \hline 371' \end{array}$$

Produit. $5081^h\ 11'$

305. *Deuxième règle.* — Pour diviser un nombre complexe par un nombre entier, on divise successivement chaque collection d'unités du dividende par le diviseur, en commençant par la gauche.

Exemple. — $376^h\ 15'\ 50'' : 5 = 75^h\ 15'\ 10''$.

5) $376^h\ 15'\ 50''$ (75^h 1^h 5) $75'$ ($15'$) 5) $50''$ ($10''$	$376^h : 5 = 75^h$ et il reste 1^h ou $60' + 15 = 75'$; $75' : 5 = 15'$ sans reste ; enfin $50'' : 5 = 10''$.

306. *Troisième règle.* — Pour diviser un nombre complexe par 10, 100 ... ; 1° on divise d'abord les unités supérieures ; 2° on convertit la partie décimale en subdivisions de l'ordre immédiatement inférieur et l'on ajoute les unités de cet ordre contenues dans le nombre complexe après les avoir divisées par 10, 100 ..., etc.

Exemple. — 375 jours $15^h\ 59'$: 100 = 3 jours $18^h\ 9'$, 59.

Tableau des calculs.	
100) 375 jours $15^h\ 59'$ 3,75 18^h 0,15 $18^h,15$ $9',00$ 0,59 $9',59$	375 jours : 100 = 3,75 j. 0,75 j. = 0,75 × 24^h = 18^h. $15^h : 100 = 0,15^h$ et $18^h + 0^h,15 = 18^h,15$; $0^h,15 = 0,15 \times 60' = 9'$. $59' : 100 = 0',59$ et $9' + 0'59 = 9'59$.

307. *Quatrième règle.* — Pour diviser un nombre complexe par un nombre entier quelconque ; 1° on divise les unités supé-

Digitized by Google

rieures par le diviseur et l'on aura les unités supérieures du quotient ; 2° on réduit le reste en unités de l'ordre suivant et l'on y ajoute, au résultat, les unités du même ordre contenues dans le dividente ; 3° on divise le résultat par le diviseur et l'on aura les unités de la première subdivision du quotient, etc.

Exemple. — 38 jours 5^h 6′ : 3 = 12 jours 17^h 42′,

Tableau des calculs.	
3) 38 jours 5^h 6′ (12 jours	Le tiers de 38 j. = 12 j. ; il reste 2 j.
3) 53^h (17^h	2 j. = $48^h + 5^h = 53^h$;
3) 126′ (42′	$53^h : 3 = 17^h$; il reste 2^h ; etc.

308. Remarque. — Quand le diviseur est un nombre assez grand et qu'il n'est pas premier, on divise successivement le dividende par chacun des facteurs du produit.

Exemple. — Le diviseur est 2400 ; on divisera successivement le dividende par les facteurs 4, 6 et 100 de 2400.

309. *Cinquième règle.* — Pour trouver combien de fois un nombre complexe est contenu dans un nombre complexe : 1° on convertit les deux termes en des nombres entiers rapportés à la même unité ; 2° on divise les deux nombres entiers l'un par l'autre.

Exemple. — Combien y a-t-il de fois 13 j. 3^h 15′ en 365 j. 5^h 48′ 46″ (une année solaire tropique) ?

Solution. — 365 j. 5^h 48′ 46″ = 31556926″ et 13 j. 3^h 15′ = 1134900″ ; enfin 31556926 : 1134900 = 27 fois à une fraction près.

310. *Sixième règle.* — Dans l'évaluation des surfaces, on doit multiplier entre eux deux nombres complexes composés des mêmes unités ; dans ce cas on réduit aussi les facteurs en des nombres entiers rapportés à la même unité ; on multiplie entre eux les deux facteurs entiers et l'on extrait les différentes collections d'unités carrées.

Exemple. — Un pavement a 17 pieds 8 pouces de large, et 4 toises 4 pieds de long. Quelle est la superficie de ce pavement

Solution. — 17 pieds 8 pouces = 212 pouces (le pied vaut 12 pouces) ; 4 toises 4 pieds = 336 pouces (la toise vaut 6 pieds) ; 212 × 336 = 71232 pouces carrés = 13 toises carrées 26 pieds carrés 96 pouces carrés (la toise carrée vaut 36 pieds carrés et le pied carré vaut 144 pouces carrés).

Digitized by Google

MÉTHODE PAR LES PARTIES ALIQUOTES[1].

311. *Premier cas.* — Multiplier un nombre non complexe par un nombre complexe.

Exemple. — Une locomobile à vapeur coûte 21,75 fr. de loyer par jour. Combien paiera-t-on pour 13 jours 15h 35′ ?

Tableau des calculs.

			21,75 fr.
			13j 15h 35′
			282,75
15h	12	$\frac{1}{2}$	10,875
	2	$\frac{1}{12}$	1,812
	1	$\frac{1}{24}$	0,906
35′	30	$\frac{1}{2}$	0,453
	5	$\frac{1}{12}$	0,075
	Réponse :		296,87 fr.

$13 \times 21{,}75$ fr. $= 282{,}75$ fr. ; 15h $= \frac{15}{24}$ de j. ; or $\frac{15}{24} = \frac{12}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$ et l'on aura les $\frac{15}{24}$ de 21,75 fr. en prenant d'abord la moitié de 21,75 ce qui donne 10,875 ; puis comme $\frac{1}{12} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$ on prendra le 6e du résultat, ce qui donne 1,812 ; pour le 24e on prendra la moitié du 12e, donc la moitié de 1,812, ce qui donne 0,906 — 35′ $= \frac{35}{60}$ d'heure $= \frac{30}{60}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{5}{60}$ ou $\frac{1}{12}$; on prendra successivement la moitié de 0,906, puis le 6e du résultat ; enfin on additionnera tous les résultats.

312. *Deuxième cas.* — Les deux facteurs sont complexes.

Exemple. — Combien paiera-t-on en Angleterre pour 347lb 13oz 7dr à 5s 10d $\frac{3}{4}$ la lb[2] ?

Tableau des calculs.

				0£	5s	10d $\frac{3}{4}$
				347lb	13oz	7dr
5s	2	$\frac{1}{10}$	34 £	14s		
	2	$\frac{1}{10}$	34	14		
	1	$\frac{1}{20}$	17	7		
10d	6	$\frac{1}{2}$	8	13	6d	
	3	$\frac{1}{4}$	4	6	9	
	1	$\frac{1}{12}$	1	8	11	
$\frac{3}{4}$	2	$\frac{1}{2}$	0	14	5	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{4}$	0	7	2	$\frac{3}{4}$
13oz	8	$\frac{1}{2}$	0	2	11	$\frac{1}{4}$ [3]
	4	$\frac{1}{4}$	0	1	5	$\frac{2}{4}$
	1	$\frac{1}{16}$	0	0	4	$\frac{1}{4}$
7dr	4	$\frac{1}{4}$	0	0	1	
	2	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
	Réponse :		102 £	10s	9d	

On calcule d'abord le prix de 347lb ; en disant à 1 £ les 347lb coûteraient 347 £ et à 0 £ 5s 10d $\frac{3}{4}$, les 347lb coûtent 347 × 0 £ 5s 10d $\frac{3}{4}$, et l'on opère comme dans le 1er cas.

Pour calculer le prix de 13oz ou $\frac{13}{16}$ de lb, on décompose $\frac{13}{16}$ en $\frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$. et l'on prend successivement la moitié du multiplicande, puis le quart ou mieux la moitié de la moitié; enfin le 16e ou mieux le quart du quart; et ainsi de suite.

1. Cette méthode est appelée *practice* (pratique) dans les ouvrages anglais ; elle sert à calculer le prix d'une quantité quelconque de marchandises.

2. La livre sterling (£) vaut 20 schellings (s) et le schelling vaut 12 pence (d) La livre avoirdupois (lb) vaut 16 onces (oz) et l'once vaut 16 drachmes (dr). (Voir appendice IV).

3. En Angleterre, on ne prend pas de fraction inférieure au *farthing* ou quart de penny ; c'est ainsi que la moitié de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{4}$.

Digitized by Google

313. Dans beaucoup de cas il vaudra mieux, dans la pratique, opérer d'après la remarque du n° **301**.

Exemple. — Un propriétaire a payé en Angleterre 370 £ 13 s pour 2 acres 4 chains 13 rods de terre. — A combien revient l'acre ?

Solution. — 2 acres 4 chains 13 rods $= \frac{397}{160}$ d'acre. (Voir appendice IV).

Le prix de l'acre $= 370$ £ 13 s : $\frac{397}{160} = 370$ £ 13 s $\times \frac{160}{379}$.

On multiplie d'abord 370 £ 13 s par 160 ou 20×8 et l'on divise le résultat par 397, on obtient ainsi 149 £ 7 s 7 d $\frac{1}{4}$.

CHAPITRE IV.

Extraction des racines.

314. Pour l'extraction des racines on opère toujours d'après la règle du n° **301**.

Exemple. — Quelle est la longueur du côté d'un carré qui a la même superficie qu'une pièce de terre qui a 3780 yds 3 P de long et 2952 yds 2 P 3 p de large ?

Solution. — 3780 yds 3 P valent $\frac{11342}{3}$ de yd ;

2952 yds 2 P 3 p valent $\frac{11811}{4}$ de yd ;

la superficie de la pièce de terre est donc de $\frac{11342}{3} \times \frac{11811}{4} = 11163363{,}5$ yds carrés.

$$\sqrt{11163363{,}5} = 3341{,}16 \text{ yds} = 3341 \text{ yds } 0 \text{ P } 5{,}76 \text{ p.}$$

EXERCICES.

1. Au 1er mai le lever du soleil est à $4^h12'$ et son coucher à $7^h13'$. Au 1er juin, le lever est à $4^h3'$ et le coucher à 7^h52. — On veut connaitre les longueurs respectives du jour et de la nuit à ces deux époques, la quantité dont ces deux longueurs ont varié pendant la durée du mois, et la quantité moyenne dont elles ont varié chaque jour.

2. En 3 jours une montre avance de $44'8''$. De combien avance-t-elle par jour ?

3. Calculez le poids en kg. de 7345^{lb} 15 oz 12 dr, sachant que la lb pèse 453 gr.

4. 159 lb 9 oz 7 dr d'une certaine marchandise ont coûté 954 £ 8 d. A combien revient la lb ?

5. Entre combien de personnes peut-on distribuer une somme de 30425 £ 175, sachant que chaque personne devrait recevoir 103 £ 9 s ?

6. On a retiré au bout de 3 ans 4 mois 12 jours des intérêts simples s'élevant à la somme de 50340 £ 18 s 11 d. — Combien cela fait-il d'intérêts par an ?

7. Le jour sidéral est l'intervalle de temps employé par chaque étoile, dans son mouvement diurne, pour parcourir uniformément une circonférence entière. — Quel est, d'après cela, en degrés, minutes et secondes, la valeur de l'arc parcouru par un de ces astres en 9 heures $37'41''$ sidérales ?

Digitized by Google

8. Un négociant belge a acheté en Angleterre 563 lb 13 oz 14 dr d'une certaine marchandise à 2 £ 9 s les 100 lb ; on donne 5 p. °/₀ de commission à la personne qui fait l'achat ; enfin, les frais de transport et d'entrée en Belgique s'élèvent ensemble à 37,58 frs. — A quel prix faut-il revendre le kg. en Belgique pour gagner 20 p. °/₀ sur l'argent déboursé ? Le change est de 25,40 fr.

9. Un détaillant achète directement, en Angleterre, 248 yds I P 5 p d'étoffe à 9 S 7 d le yd, avec un escompte de $\frac{1}{2}$ p. °/₀ parce qu'il paie au comptant. Les frais de transport et les droits d'entrée, en Belgique, s'élèvent en tout à 30,45 fr. Combien le détaillant devra-t-il revendre le mètre pour gagner 23 °/₀ sur l'argent dépensé ? Le change est de 25,40 fr.

10. Une montre retardait de 8′43″ en 24 heures. Afin de la régler, on a fait marcher l'aiguille de rosette de $7\frac{1}{4}$ divisions vers l'avance, et la variation qui a été ainsi changée de sens, s'est élevée à 3′18″ dans le même temps. — De combien de divisions doit-on faire rétrograder l'aiguille pour que la montre marque exactement l'heure ?

11. Rome et Copenhague se trouvent à peu près sur le même méridien ; leurs latitudes boréales sont respectivement de 41°54′6″ et 55°40′53″. — On propose de déterminer leur distance en myriamètres sachant que le quart du méridien est de 90 degrés ou 10,000,000 de mètres ?

Digitized by Google

LIVRE III. — RAPPORTS ET PROPORTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales.

315. Quand on compare deux nombres, on peut se proposer de trouver la différence qui existe entre le 1er et le 2d, ou bien le quotient qu'on obtient quand on divise le 1er par le 2d ; le résultat de la comparaison s'appelle, dans les deux cas, le *rapport* des deux nombres ; si l'on obtient le rapport par une soustraction, c'est un *rapport arithmétique* ou *par différence* ; si l'on a fait une division c'est un *rapport géométrique* ou *par quotient*. Les deux nombres que l'on compare sont les *termes* du rapport ; le 1er nombre est l'*antécédent* du rapport et le 2d en est le *conséquent*.

316. Remarque. — On dit quelquefois que le rapport par quotient de deux nombres est égal, par exemple. à 5 : 3 ; cela veut dire que l'antécédent comprend autant de fois 5 que le second contient de fois 3. Ensuite dit-on que trois nombres sont proportionnels à 4,5 et 7, on fait connaître que le premier nombre contient autant de fois 4, que le deuxième contient 5 et que le troisième contient 7 ; le rapport du 1er au 2e est 4 : 5, celui du 1er au 3e est 4 : 7 enfin celui du 2e au 3e est 5 : 7 ; on dit aussi, dans ce cas que les nombres sont entre eux comme 4 : 5 : 7.

317. Le rapport par différence jouit des propriétés suivantes : 1° il ne change pas de valeur quand on augmente ou qu'on diminue les deux termes d'un même nombre ; 2° quand on multiplie ou qu'on divise les deux termes par un même nombre, le rapport lui-même est multiplié ou divisé par ce nombre ; 3° suivant qu'on augmente l'antécédent ou le conséquent d'un nombre, le rapport est augmenté ou diminué de ce nombre ; 4° connaissant le conséquent et le rapport, on aura l'antécédent en additionnant le conséquent et le rapport ; si l'on connaît l'antécédent et le rapport, on aura le conséquent en soustrayant le rapport de l'antécédent, etc., etc.

Digitized by Google

318. Le rapport par quotient jouit des propriétés suivantes : 1° il est plus grand ou plus petit que *un* suivant que l'antécédent est plus grand ou plus petit que un ; 2° ce rapport est multiplié ou divisé par un nombre suivant que l'antécédent ou le conséquent est multiplié par ce nombre ; 3° ce rapport ne change pas de valeur quand on multiplie ou qu'on divise les deux termes par un même nombre ; 4° connaissant le conséquent et le rapport, on aura l'antécédent en multipliant le conséquent par le rapport ; si l'on connaît l'antécédent et le rapport, on aura le conséquent en divisant l'antécédent par le rapport, etc.

On démontrera facilement ces propriétés.

319. Le rapport par différence de deux grandeurs de la même espèce est la grandeur qu'il faut ajouter à l'une pour obtenir l'autre ; le rapport par quotient est le nombre par lequel il faut multiplier l'une pour obtenir l'autre. Si les grandeurs sont évaluées en nombres leur rapport est exprimé par celui des nombres qui en sont les mesures. (Note XXIX.)

320. Une *proportion* est l'expression de l'égalité de deux rapports de même espèce. La proportion est dite *par différence* ou *arithmétique* ou bien est une *équidifférence* si les rapports sont par différence, et la proportion est dite *par quotient* ou *géométrique* si les rapports sont par quotient[1].

Exemples. — 1° 8 — 6 = 7 — 5 est une proportion arithmétique (P. A.) ou une équidifférence ; on l'écrit ordinairement sous la forme 8 . 5 = 7 . 3, ou bien encore 8.5 : 7.3 ; on énonce cette formule en disant 8 est à 5 comme 7 est à 3. 2° 10 : 4 = 15 : 6 est une proportion géométrique (P.G), on l'énonce aussi en disant 10 est à 4 comme 15 est à 6[2].

321. On distingue les termes d'une proportion en les nommant le 1er, le 2e, le 3e et le 4e terme de la proportion suivant leur ordre successif ; on dit aussi que le 1er et le 4e sont les extrêmes et que le 2e et le 3e sont les moyens ; enfin que le 4e terme est la 4e proportionnelle arithmétique ou géométrique aux trois autres termes.

322. Trois nombres sont en *proportion continue*, quand le rapport du 1er nombre au 2e est égal au rapport du 2e au 3e.

Exemples. — 20 . 16 = 16 . 12 ou plus simplement ÷ 20 . 16 . 12 (comme 20 est à 16, 16 est à 12) est une proportion continue par différence et 20 : 16 = 16 : 12,8 ou plus simplement ∺ 20 : 16 : 12,8 (comme 20 est à 16, 16 est à 12,8) est une proportion continue par quotient[3].

1. Ce terme a été introduit par Lacroix.

2. Pendant longtemps on a lié les deux membres d'une proportion par le signe : ou ∴ pour la P. A. et par le signe :: pour la P. G. ; ces notations sont généralement abandonnées depuis que Leibnitz adopta définitivement le signe ordinaire = de l'égalité.

3. Autrefois *médieté*.

Digitized by Google

323. Il est clair qu'une proportion continue n'est qu'une proportion ordinaire dont les termes moyens sont égaux entre eux. Pour la proportion continue par différence, le terme moyen est dit le *moyen arithmétique* ou simplement la *moyenne* entre les deux autres termes ; pour la proportion continue par quotient, c'est le *moyen géométrique* ou *proportionnel*. Quant au 3e terme il est dit alors la 3e proportionnelle aux deux autres.

324. La propriété fondamentale de la P. A. est la suivante : la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes ; réciproquement si quatre nombres consécutifs sont tels que la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes, les quatre nombres sont en P. A.

Démonstration. — 1° Soit la P. A. $8 . 6 = 7 . 5$; le rapport commun est 2, de sorte que chaque antécédent est égal à son conséquent plus deux ; donc on peut écrire la proportion sous la forme suivante $6 + 2 . 6 = 5 + 2 . 5$ qui met en évidence la proposition énoncée. 2° Soient les nombres 8, 6, 7, 5 tels que $6 + 7 = 8 + 5$, on aura la P. A. $8 \quad 6 = 7 . 5$; en effet, 2 étant le rapport par différence de 8 et 6, les nombres sont $6 + 2$, 6, 7 et 5 ; et, comme $6 + 7 = 6 + 2 + 5$, on a $7 = 2 + 5$, on voit ainsi que la différence entre 7 et 5 est 2 comme celle entre 8 et 6 ; donc les quatre nombres 8, 6, 7, 5 sont en P.A.

325. *Conséquences.* — 1° Tout moyen est égal à la somme des extrêmes diminuée de l'autre moyen, et tout extrême est égal à la somme des moyens diminuée de l'autre extrême ; 2° la moyenne arithmétique entre deux nombres est égale à la demi-somme de ces deux nombres ; etc[1].

326. La propriété fondamentale de la P. G. est la suivante : le produit des moyens est égal au produit des extrêmes ; réciproquement, si quatre membres consécutifs sont tels que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes, les quatre nombres sont en P. G.

Démonstration. — 1° Soit la P. G. $10 : 4 = 15 : 6$; le rapport commun est 2,5 ; de sorte que chaque antécédent est égal à son conséquent multiplié par 2,5 ; donc on peut écrire la proposition sous la forme suivante $2,5 \times 4 : 4 = 2,5 \times 6 : 6$ qui met en évidence la proposition énoncée. 2° Soient les quatre nombres 10, 4, 15, 6 tels que $4 \times 15 = 10 \times 6$; on aura la P. G. $10 : 4 = 15 : 6$; en effet, 2,5 étant le rapport de $10 : 4$, les nombres sont $2,5 \times 4$, 4, 15 et 6 ; et comme $4 \times 15 = 2,5 \times 4 \times 6$, on a $15 = 2,5 \times 6$; on voit ainsi que le quotient de $15 : 6$ est 2,5 comme celui de $10 : 4$; donc les quatre nombres 10, 4, 15, 6 sont en P. G.

327. *Conséquences.* — 1° Tout moyen est égal au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen ; et tout extrême

1. On parle aussi quelquefois de la *moyenne entre plusieurs nombres* ; on entend par là le quotient qu'on obtient quand on divise la somme des nombres par leur quotité, la moyenne entre 4, 10 et 13 est 9.

Digitized by Google

est égal au produit des moyens divisé par l'autre extrême ; 2° le moyen proportionnel entre deux nombres est égal à la racine carrée du produit des deux nombres ; 3° lorsqu'on multiplie plusieurs proportions terme à terme, les quatre produits forment une nouvelle proportion ; 4° si plusieurs rapports sont égaux entre eux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent, etc.

Démonstration. — Les deux premières conséquences sont évidentes ; 3° soient les deux proportions $18 : 6 = 21 : 7$ et $3 : 5 = 18 : 30$; en les multipliant terme à terme, l'on a $18 \times 3 : 6 \times 5 = 21 \times 18 : 7 \times 30$ et cette proportion est exacte, car le produit des moyens est égal au produit des extrêmes ; en effet, à cause de la 1re proportion $6 \times 21 = 18 \times 7$ et à cause de la 2e $5 \times 18 = 3 \times 30$, donc $6 \times 21 \times 5 \times 18 = 18 \times 7 \times 3 \times 30$. 4° soient les rapports égaux $5 : 3 = 10 : 6 = 7{,}5 : 4{,}5$; comme chaque antécédent est égal au produit du conséquent par un nombre constant, la somme des antécédents est le même multiple de la somme des conséquents ; ce qui démontre qu'il y a encore le même rapport entre la somme des antécédents et celle des conséquents.

328. On dit que deux grandeurs quelconques sont *proportionnelles* ou *varient dans le même rapport*, quand le rapport par quotient de deux valeurs quelconques de la première grandeur est égal au rapport par quotient des valeurs correspondantes de la deuxième grandeur.

La proportionnalité de deux grandeurs est, ou bien une convention, ou bien le résultat de l'expérience, ou bien encore un fait démontré par la science. *Exemples :* 1° le *prix* d'une denrée est généralement considéré comme proportionnel à la *quantité* de la denrée [1] ; 2° on a reconnu, par l'expérience que le mouvement diurne apparent des étoiles est tel que le *nombre des degrés* parcourus par chacune d'elles sur sa circonférence est proportionnel au *temps écoulé ;* et que la *hauteur* de la chute d'un corps est proportionnelle au *carré du temps* que la chute a duré ; 3° on démontre, en physique, que la *pression* exercée par l'atmosphère sur une surface déterminée est proportionnelle à la *hauteur* du baromètre ; et, en géométrie, que l'*aire* d'un cercle est proportionnel au *carré du rayon ;* etc., etc.

---

1. Cependant le prix d'un diamant est proportionnel au *carré* du poids ; ce poids s'évalue en *carats* ; un carat pèse 212 mg ; quand ils ne sont pas taillés, leur valeur en fr. s'obtient ordinairement en multipliant le carré du nombre des carats par 48 ; un diamant taillé vaut, à poids égal, environ quatre fois autant ; toutefois, quand le poids d'un diamant dépasse 7 à 8 carats, sa valeur n'est plus fixée par aucune règle.

Digitized by Google

329. Quelquefois deux grandeurs sont telles que l'une augmentant ou diminuant dans un certain rapport, l'autre, au contraire, diminue ou augmente dans le même rapport; dans ce cas, elles sont dites *inversement proportionnelles* et, par opposition, les grandeurs que nous avons considérées d'abord, sont *directement proportionnelles*. Ex.: 1° le *nombre des ouvriers* qui doivent exécuter un certain ouvrage est inversement proportionnel au *temps* qu'ils doivent y consacrer; 2° *la valeur d'une fraction* qui a un numérateur constant est inversement proportionnelle au *dénominateur*; 3° le *volume d'un gaz* est inversement proportionnel à *la pression* que le gaz subit (loi de Mariotte); etc.

330. Remarque. — Quand une grandeur A est *inversement* proportionnelle à une grandeur B, on peut dire aussi que la valeur de A est *directement* proportionnelle à l'inverse de celle de B; en effet, soient a et a' deux valeurs de A, puis b et b' les valeurs correspondantes de B; si la grandeur A est inversement proportionnelle à la grandeur B, on aura la proportion $a : a' = b' : b$ et en divisant les deux derniers termes par $b \times b'$, elle devient $a : a' = \frac{1}{b} : \frac{1}{b'}$.

331. Quand une grandeur est proportionnelle à plusieurs autres, elle est proportionnelle à leur produit.

Démonstration. — Soit la grandeur A proportionnelle, à deux autres grandeurs B et C. Soient a, b, c et a', b', c' deux séries de valeurs correspondantes de ces grandeurs; il faut démontrer que $a : a' = b \times c : b' \times c'$. Pour cela imaginons que la grandeur C restant constante, b' soit la valeur de B et a_1 celle de A; il vient $a : a_1 = b : b'$; si alors B conserve la valeur b' et C prend la valeur c' on aura $a_1 : a' = c : c'$; en multipliant les deux proportions terme à terme $a \times a_1 : a_1 \times a' = b \times c : b' \times c'$; d'ailleurs on n'altère pas la valeur du premier rapport en divisant ses deux termes par a_1, donc enfin $a : a' = b \times c : b' \times c'$.

Supposons maintenant un nombre quelconque de grandeurs B, C, D, E, etc.; puisque A varie proportionnellement à B et à C, il variera aussi proportionnellement à B $\times$ C; si A varie proportionnellement à B $\times$ C et à D, il variera proportionnellement à B $\times$ C $\times$ D et ainsi de suite.

Application. — On démontre, en géométrie, que l'aire du rectangle est proportionnelle à la base et à la hauteur, donc elle est proportionnelle au produit de la base par la hauteur.

Digitized by Google

EXERCICES.

I. Quelle est la valeur du nombre inconnu x dans les proportions suivantes :

$$10 \,.\, 8 = 7 \,.\, x$$
$$9{,}5 \,.\, 2{,}72 = x \,.\, 1{,}63$$
$$8\tfrac{2}{5} \,.\, x = 5{,}45 \,.\, \tfrac{5}{9}$$
$$x \,.\, 3\text{j}\ 6\text{h} = 7\text{h}\,5' \,.\, 2\text{h}\,5'\,6''$$
$$7 : 18 = 13 : x$$
$$9{,}45 : 2{,}007 = x : 3{,}0054$$
$$3\tfrac{4}{5} : x = 2\tfrac{4}{7} : 3{,}44$$
$$x : 2\text{lb}\,5\text{oz} = 7\ £\ 3\text{d} : 13\ £\ 5\text{s}.$$

II. Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez un nombre qui soit autant au-dessous de 73, qu'il est au-dessus de 37.

2. Un capitaine interrogé sur le nombre des soldats de sa compagnie répond : ce nombre contient autant de fois 12, que 12 lui-même contient de fois le $\frac{4}{16}$ du nombre des soldats. Combien y a-t-il de soldats dans cette compagnie ?

III. Démontrez les principes suivants :

1. La moyenne arithmétique de deux ou plusieurs nombres est comprise entre la plus grande et la plus petite.

2. La moyenne arithmétique de deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique.

3. Dans quel cas peut-on ajouter deux P. G. terme à terme ?

4. Si l'on a la proportion $a : a' = b : b'$, on a aussi $ma + nb : ma' + nb' = a : a'$.

5. Si une grandeur est directement proportionnelle à une seconde grandeur et inversement proportionnelle à une troisième, la première ne variant pas, les deux autres seront directement proportionnelles.

CHAPITRE II.

Propriétés particulières des P. G. [1]

332. I. — On peut faire subir aux termes d'une proportion toutes les transformations qu'on veut, pourvu toutefois que le rapport des deux premiers termes reste égal à celui des deux derniers, ou bien que le produit des moyens reste égal à celui des extrêmes (**326**).

Delà résulte immédiatement qu'on peut : 1° échanger les moyens entre eux, ou les extrêmes ; 2° mettre les moyens à la place des extrêmes et réciproquement ; 3° échanger les deux rapports ; 4° remplacer les rapports par les inverses (**234**).

1. La connaissance de ces propriétés est nécessaire surtout pour les théories de la géométrie.

Digitized by Google

Il y a ainsi huit manières différentes d'écrire une proportion avec les mêmes termes :

$$a : b = c : d,$$
$$a : c = b : d,$$
$$b : a = d : c,$$
$$b : d = a : c,$$
$$c : a = d : b,$$
$$c : d = a : b,$$
$$d : b = c : a,$$
$$d : c = b : a.$$

5° On peut multiplier ou diviser un moyen par un nombre quelconque, pourvu qu'on multiplie ou qu'on divise en même temps un des extrêmes par le même nombre ; 6° on peut multiplier ou diviser un moyen par un nombre quelconque pourvu que, au contraire, on divise ou multiplie l'autre moyen par le même nombre, etc.

333. II. — Si deux proportions ont un rapport commun, on peut faire une troisième proportion en égalant les deux autres rapports.

Car deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles (axiome).

334. III. — Si deux proportions ont les mêmes antécédents ou les mêmes conséquents, on peut faire une proportion avec les quatre termes qui restent. Ainsi : 1° soient les deux proportions $a : b = c : d$ et $a : b' = c : d'$, on peut écrire $b : b' = d : d'$ ou $b : d = b' : d'$; 2° soient les deux proportions $a : b = c : d$ et $a' : b = c' : d$, on peut écrire $a : a' = c : c'$ ou bien $a : c = a' : c'$.

Démonstration. — 1° Les deux proportions considérées peuvent être mises sous la forme $a : c = b : d$ et $a : c = b' : d'$; d'où $b : d = b' : d'$ ou $b : b' = d : d'$. 2° on raisonnera de la même manière.

335. IV. — Dans toute proportion on peut remplacer un des deux termes du premier rapport par la somme ou la différence des deux termes de ce rapport, pourvu qu'on remplace aussi le terme correspondant du second rapport par la somme ou la différence des deux termes de ce rapport.

Démonstration. — Soit la proportion $a : b = c : d$, on peut écrire $a \pm b : c = c \pm d : d$; en effet, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes : le produit des moyens est $bc \pm bd$ (**65**) et le produit des extrêmes est $ad \pm bd$; or le terme bd est commun et le produit $bc = ad$, car pour la proportion le produit des moyens est égal au produit des extrêmes ; donc $bc \pm bd = ad \pm bd$; on pourrait démontrer de même que $a : a \pm b = c : c \pm d$, ou bien si $b > a$, d'où $d > c$, $b \pm a : b = d \pm c : d$, etc.

Digitized by Google

336. V. — Dans toute proportion la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou la différence des deux derniers, comme le premier terme est au troisième, ou comme le deuxième est au quatrième.

Démonstration. — Soit la proportion $a : b = c : d$; on peut écrire $a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$; en effet $a \pm b : b = c \pm d : d$, il ne reste plus qu'à intervertir l'ordre des moyens.

337. VI. — Dans toute proportion la somme ou la différence des antécédents est à la somme ou la différence des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.

Démonstration. — Soit la proportion $a : b = c : d$; d'où en intervertissant l'ordre des moyens, $a : c = b : d$; donc d'après le principe précédent $a \pm c : b \pm d = a : b = c : d$.

338. *Conséquence.* — Quand on a une série de rapports égaux la somme ou la différence d'un certain nombre d'antécédents est la somme ou la différence des conséquents qui y correspondent comme un antécédent est à son conséquent (**213**).

Démonstration. — Soit la série des rapports égaux $a : b = c : d = e : f = g : h = i : k$; on peut écrire $a + e - g ; b + f - h = a : b = c : d = \ldots.$; en effet puisque $a : b = e : f$, on a aussi $a + e : b + f = e : f$, d'où $a + e : b + f = g : h$; donc enfin $a + e - g : b + f - h = g : h$.

339. VII. — Quand on multiplie plusieurs proportions terme à terme, les produits sont en proportion.

Ce principe a déjà été démontré (**327**).

340. VIII. — Quand on divise deux proportions terme à terme, les quotients sont en proportion.

341. IX. — Si quatre nombres sont en proportion, leurs puissances de même degré sont en proportion.

342. X. — Si quatre nombres sont en proportion, leurs racines de même indice sont en proportion.

Les trois derniers principes seront facilement démontrés.

EXERCICES.

Au moyen des principes précédents, transformer les proportions suivantes en d'autres proportions dans lesquelles le nombre inconnu x soit isolé dans un terme :

$$x + 3 : 3 = 9 : 5$$
$$x + 5 : x - 5 = 18{,}8 : 10{,}2$$
$$3 - 10x : x = 5 : 8$$
$$5 + 7x : 6x = 20{,}2 : 5$$
$$9x : 10 = 3 - 2x : 7.$$

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Applications.

§ I. — RÈGLE DE TROIS (NOTE XXX).

343. Dans un grand nombre de problèmes, les nombres dont on s'occupe sont directement ou inversement proportionnels. On peut résoudre les questions de ce genre de trois manières : 1° par la réduction à l'unité ; 2° par l'emploi des proportions ; 3° par une règle particulière appelée la *règle de trois*.

344. *Exemple* I. — 50 kg de riz coûtent 15 fr. Quel est le prix de 6 kg ?

Première solution (par la réduction à l'unité).

50 kg coûtent	15,00 fr.
1 kg coûte 50 fois moins ou . . .	0,30 »
6 kg coûtent 6 fois plus ou . . .	1,80 »

Ou mieux, en remarquant que 2 est le p. g. c. d. de 50 et 6.

50 kg coûtent	15,00 fr.
2 kg » 25 fois moins ou . .	0,60 »
6 kg » 3 fois plus ou . . .	1,80 »

Deuxième solution (par les proportions).

Soit x le prix de 6 kg. Dans ce problème il y a deux rapports : celui des poids 50 : 6 et celui des prix 15 : x ; or, ces deux rapports sont égaux, car le prix est directement proportionnel au poids ; on a donc la proportion $50 : 6 = 15 : x$; et, d'après la règle connue (**327**), $x = \frac{6 \times 15}{50} = 1{,}80$ fr.

Troisième solution (par la règle de trois).

La solution précédente montre que pour obtenir la valeur demandée, il faut *multiplier la grandeur de la même espèce que celle qui doit être calculée, par le rapport direct de la 2e valeur à la 1re valeur de l'autre grandeur* ; c'est ce qu'on appelle la *règle de trois simple et directe*.

D'après cette règle, $x = \frac{6}{50} \times 15$ fr. $= 1{,}80$ fr.

345. *Exemple* II. — Pour tapisser une chambre on a employé 17 rouleaux de papier de 45 cm. de large. Combien de rouleaux aurait-on dû employer pour tapisser la même chambre avec du papier de 30 cm. de large ?

Digitized by Google

Première solution (par la réduction à l'unité).

Pour 45 cm.	de large	il faut			17	roul.
» 15	»	»	»	3 fois plus ou	51	»
» 30	»	»	»	2 fois moins ou	25,5	»

Deuxième solution (par les proportions).

Soit x le nombre de rouleaux à 30 cm. Dans ce problème il y a deux rapports ; celui des largeurs 43 : 30 et celui des nombres de rouleaux 17 : x ; mais le nombre des rouleaux est inversement proportionnel à la largeur du papier, donc le 1er rapport est égal à l'inverse du 2d ; d'où la proportion $45 : 30 = x : 17$ et d'après la règle connue, $x = \frac{45 \times 17}{50} = 25\frac{1}{2}$ r.

Troisième solution (par la règle de trois).

Il résulte de la solution précédente qu'on obtiendra le nombre inconnu, *en multipliant la valeur connue de la grandeur de la même espèce que celle qui doit être calculée par l'inverse du rapport de la deuxième valeur à la première de l'autre grandeur ; c'est la règle de trois simple et inverse.*

D'après cette règle, $x = \frac{45}{30} \times 17$ roul. $= 25\frac{1}{2}$ rouleaux.

346. *Exemple* III. — 18 ouvriers ont creusé, en 50 jours, un canal de 1800 m. de long ; d'un autre côté, 20 ouvriers dont chacun ne faisait que les deux tiers de l'ouvrage de l'un des 18 premiers ouvriers, en travaillant le même nombre d'heures par jour, ont creusé 1500 m. dans un terrain trois fois plus mou que le premier. On demande combien de jours ces 20 ouvriers ont travaillé ?

Première solution (par la réduction à l'unité).

18	ouv.	creusent	1800 m.	faisant un tr.	1	d'une dureté	1	en...	50	j.
2	»		1800	»	» 1	»	1	»	450	j.
20	»		1800	»	» 1	»	1	»	45	j.
20	»		300	»	» 1	»	1	»	7,5	j.
20	»		1500	»	» 1	»	1	»	37,5	j.
20	»		1500	»	» $\frac{1}{3}$	»	1	»	112,5	j.
20	»		1500	»	» $\frac{2}{3}$	»	1	»	56,25	j.
20	»		1500	»	» $\frac{2}{3}$	»	$\frac{1}{3}$	»	18,75	j.

Deuxième solution (par les proportions).

Soit x le nombre demandé de jours. Il y a, dans cette question, quatre quantités à considérer : 1° le nombre des ouvriers, 2° le nombre de mètres à creuser, 3° le travail relatif par chaque ouvrier, enfin 4° la dureté du terrain. Pour simplifier le problème nous le décomposerons en des problèmes

Digitized by Google

plus simples dans lesquels il n'y ait plus que deux rapports à considérer, comme suit :

a) 18 ouvriers ont travaillé pendant 50 jours et dans certaines conditions. Combien de jours u faudra-t-il à 20 ouvriers travaillant dans les mêmes conditions ?

On peut écrire la proportion $u : 50 = 18 : 20$.

b) 20 ouvriers pour faire 1800 m. dans certaines conditions ont travaillé u jours. Combien de jours v faudra-t-il pour 1500 m. ?

On peut écrire la proportion $v : u = 1500 : 1800$.

c) 20 ouvriers ont fait 1500 m. en v jours et dans certaines conditions. Combien de jours w leur faudrait-il s'ils ne faisaient plus, dans le même temps, que les deux tiers du travail qu'ils faisaient d'abord ?

On peut écrire la proportion $w : v = 1 : \frac{2}{3}$.

d) 20 ouvriers ont fait, en w jours, 1500 m. quand chacun ne faisait que les deux tiers de l'ouvrage qu'il faisait d'abord. Combien de jours x mettraient-ils à faire le même ouvrage dans un terrain 3 fois plus mou ?

On peut écrire la proportion $x : w = 1 : 3$.

Multiplions les quatre proportions terme à terme et divisons les deux premiers termes de la proportion résultante par $u \times v \times w$, il vient :

$$x : 50 = 18 \times 1500 \times 1 \times 1 : 20 \times 1800 \times \tfrac{2}{3} \times 3,$$

d'où $$x = \frac{50 \times 18 \times 1500 \times 1 \times 1}{20 \times 1800 \times \frac{2}{3} \times 3} = 18\tfrac{3}{4} \text{ jours.}$$

Troisième solution (par la règle de trois).

On peut obtenir directement ce résultat au moyen de la règle suivante qu'on appelle la *règle de trois composée :* 1° *écrivez sur deux lignes les nombres correspondants des différentes espèces de grandeurs dans les deux hypothèses que le problème comporte (le nombre demandé est représenté par x) ;* 2° *distinguez les grandeurs directement et inversement proportionnelles au nombre demandé en désignant les premières par la lettre d et les autres par la lettre i ;* 3° *divisez la valeur de chaque grandeur dans la seconde hypothèse par la valeur correspondante dans la première hypothèse quand les grandeurs sont marquées de la lettre d, et inversement quand elles sont marquées de la lettre i ; enfin* 4° *multipliez successivement le nombre donné de la même espèce que le nombre demande par chacune des fractions : on obtient ainsi la réponse demandée.*

Digitized by Google

TABLEAU DES CALCULS.

Ouvriers.	Jours.	Longueurs.	Travail.	Dureté.
18	50	1800	1	1
20	x	1500	$\frac{2}{3}$	3
i		d	i	i

$$x = \frac{18}{20} \times \frac{1500}{1800} \times \frac{1}{(\frac{2}{3})} \times \frac{1}{3} \times 50 \text{ jours} = 18\,\tfrac{3}{4} \text{ jours.}$$

EXERCICES.

1. Un commerçant a gagné 5 schellings 6 pence sur un article qu'il a payé 22 sh. Combien a-t-il gagné p. °/₀ ?

2. Une fontaine met 11 jours à remplir un bassin en coulant 7^h 14′ par jour. Combien mettrait-elle de jours à remplir le bassin en coulant 6^h 4′ par jour ?

3. Un marchand a du vin à 70 centimes le litre qu'il veut troquer avec de l'eau-de-vie à 1,50 fr. A combien doit-il compter son vin pour que l'eau-de-vie ne lui revienne qu'à 1,25 fr.

4. Une chèvre est attachée par une chaîne de 3,75 m. de longueur à un poteau planté au milieu d'une prairie et mange l'herbe à laquelle elle peut atteindre au bout de $1\frac{4}{5}$ jour. Pendant combien de jours pourrait-elle se nourrir avec l'herbe de la prairie si la chaîne avait une longueur de 5 m. ?

5. Un diamant de $1\frac{3}{4}$ carat a coûté 120 florins. Quel serait le prix d'un diamant de même qualité et de même forme pesant $3\frac{4}{5}$ carats ?

6. Une pierre est tombée de 176,50 m. de haut en 6 secondes ; de quelle hauteur tomberait-elle si la chute durait $3\frac{1}{4}$ secondes ?

7. Dans une pépinière de forme rectangulaire on place les arbres à 1.20 m. de distance l'un de l'autre ; et il y en a en tout 3744. Combien y en aurait-il si on les plaçait à 0,90 c. de distance l'un de l'autre ?

8. Une fontaine, coulant pendant 20 heures par jour, a rempli en 42 jours un bassin de 21 m. de longueur sur 15 de largeur et 8 de profondeur. Combien lui faudra-t-il de jours pour remplir un bassin ayant 10 m. de longueur, autant de largeur et de profondeur, en laissant couler la fontaine pendant 16 h. par jour et en supposant que, par suite d'une modification introduite, elle donne un quinzième d'eau de plus dans le même temps ?

9. Calculez l'intérêt, pour 45 jours, de 13600 fr. à 3,5 °/₀ ?

10. 40 ouvriers qui travaillent 9 h. par jour ont creusé en 25 j., un fossé de 160 m. de longueur, 3 m. de largeur et 4 m. de profondeur. Combien faudrait-il d'ouvriers pour creuser, en 20 j , un canal de 150 m. de longueur, 2,5 de largeur et 3,4 de profondeur, s'ils travaillent 8 h. par j. ? On suppose de plus que la dureté du premier terrain est à celle du second comme 5 est à 8 et que la force d'un ouvrier de la première brigade est à celle d'un ouvrier de la seconde comme 6 est à 3.

11. On a payé 15 £ 12 s à 16 laboureurs pour 18 jours de travail ; combien, pour un salaire journalier inférieur de un cinquième, payera-t-on de laboureurs qui ont travaillé 24 jours avec 35 £ 2 s ?

12. Si l'on transporte 30 cwt. à 15 milles de distance pour 5 £ 8 s 9 d. A quelle distance peut-on faire transporter 80 cwt. pour 29 £ ?

Digitized by Google

§ II. — RÈGLE DE PARTAGE, DE SOCIÉTÉ OU DE COMPAGNIE.

347. Cette règle a pour but de diviser un nombre donné proportionnellement à des nombres donnés ; c'est une simple application des proportions.

348. *Exemple* I. — Partager une somme S en parties proportionnelles aux nombres m, n, p...

Solution. — Soient x, y, z... les parts ; on peut écrire :

$x : m = y : n = z : p = \ldots = x + y + z + \ldots$ ou $S : m + n + p + \ldots$ ou s (**327**, 4°) ; donc aussi on a les proportions :

$$x : m = S : s \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{mS}{s}$$

$$y : n = S : s \qquad y = \frac{nS}{s}$$

$$z : p = S : s \qquad z = \frac{pS}{s}$$

349. *Exemple* II. — Partager une somme S en parties inversement proportionnelles aux nombres m, n, p...

Solution. — On écrira :

$$x : \frac{1}{m} = y : \frac{1}{n} = z : \frac{1}{p} = \ldots = S : \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \ldots \text{ ou } s$$

et l'on retombera sur les formules précédentes.

350. *Exemple* III. — Partager un bénéfice S entre des associés connaissant la mise de chacun et le temps pendant lequel la mise a été placée.

Solution. — Soient x, y, z... les parts ; m et t, m' et t', m'' et t''... la mise et le temps de chaque associé. Généralement les parts sont proportionnelles à la mise et au temps, donc au produit de la mise par le temps (**331**) ; et l'on aura $x : mt = y : m't' = z : m''t'' = \ldots = S : mt + m't' + m''t'' + \ldots$ ou s ; on est encore ramené aux formules de l'exemple I.

EXERCICES.

1. Un père veut partager une somme de 126,35 fr. entre ses trois enfants âgés respectivement de 7, 13 et 15 ans. Quelle sera la part de chaque enfant si les parts sont : 1° proportionnelles à l'âge, 2° inversement proportionnelles à l'âge ?

2. Une personne laisse, en mourant, sa fortune à 7 parents, dont 4 au 2e degré, 2 au 3e degré et 1 au 4e degré, à la condition que le partage se fera en raison inverse du degré de parenté. La somme à partager étant de 350,000 fr., quelle est la part de chaque héritier ?

Digitized by Google

3. Deux associés ont formé une entreprise pour laquelle ils ont fourni respectivement 8000 fr. et 5000 fr. ; le travail du premier est évalué au quart du capital social et celui du second aux trois cinquièmes de ce même capital. Le bénéfice de l'association est de 2500 fr. ; quelle est la part de chaque associé ?

4. En 6 ans, une société de 4 personnes a gagné 25000 fr. sur un capital de 54800 ; la mise de la 1re est à celle de la 2e comme 3 est à 4 ; celle de la 2e est à celle de la 3e comme 5 est à 6; enfin celle de la 3e est à celle de la 4e comme 6 est à 7. On demande la mise et le gain de chaque personne.

5. Quatre communes A, B, C, D doivent contribuer à la construction d'un pont pour la somme de 141800 fr., en raison directe de la population et en raison inverse de la distance de chaque commune au pont. On demande ce que doit donner chaque commune, sachant que les populations respectives sont de 5250, 4800, 2100 et 1500 habitants, et les distances de 900, 2700, 1800 et 3060 mètres.

6. Un industriel lègue, à trois employés, une somme de 2650 fr. ; en imposant cette condition que le partage se fera en proportion directe de la durée des services et en proportion inverse de l'âge de chaque employé. Combien revient-il à chacun, sachant que le premier, âgé de 56 ans, a 14 ans de service ; le second, âgé de 60 ans, 20 ans de service ; enfin le troisième, âgé de 70 ans, 21 ans de service ?

7. Trois personnes font une entreprise en commun ; le contrat stipule que le premier qui a organisé l'affaire prélèvera d'abord 15 % sur les bénéfices et que le reste sera partagé entre les trois associés proportionnellement aux mises. Lors du règlement des comptes, on constate que le gain total a été de 40 % du capital émis. Trouver la part de chaque associé, sachant que chacun a reçu 35000 fr. pour la mise et le bénéfice réunis.

8. Deux personnes ont à réaliser une créance, et 6 fois la part de la 1re font 5 fois la part de la 2e. Si la 1re réduisait sa part d'un cinquième et la 2e d'un septième, les deux personnes recevraient ensemble 6400 fr. Quelle est la part de chaque personne, dans la créance ?

9. Trois personnes se sont associées pour deux ans dans une entreprise et ont réalisé un bénéfice égal aux deux tiers de la somme des mises. A la fin de la deuxième année, la 1re a retiré pour sa part les $\frac{18}{45}$ de la somme des mises et des bénéfices; la 2e a retiré les $\frac{23}{45}$, et la 3e 20160 fr. On demande la mise et le bénéfice de chaque personne.

Digitized by Google

LIVRE IV. — PROBLÈMES SERVANT D'APPLICATION AUX THÉORIES DU CALCUL.

351. Un *problème de calcul* est l'énoncé d'une question dans laquelle il s'agit de trouver des nombres inconnus, en opérant sur des nombres donnés, de manière à satisfaire à des conditions indiquées par l'énoncé de la question. Les conditions sont *explicites* quand elles sont exprimées en termes clairs et formels par l'énoncé ; elles sont *implicites* quand elles peuvent être tirées naturellement, par induction ou par conséquence, de la question formulée.

352. *Résoudre un problème*, c'est déterminer les nombres inconnus au moyen des nombres connus ; en d'autres termes, c'est trouver les réponses aux questions proposées. La *solution* est la suite des opérations et des raisonnements qu'on fait pour arriver aux résultats demandés. Quelquefois on donne ce nom au résultat lui-même.

353. A chaque instant, les nécessités de la vie conduisent à résoudre des problèmes de calcul ; le commerce, l'industrie agricole ou manufacturière, chaque variété d'exploitation, la pratique du droit et des sciences en général, exigent la connaissance des règles de l'arithmétique et une certaine pratique de la résolution des problèmes ; de plus, l'étude de cette résolution est une excellente gymnastique de l'intelligence qui exerce la sagacité des élèves et développe leur esprit de recherche, surtout au point de vue des conditions implicites. Dans les classes préparatoires on a résolu des problèmes élémentaires qui se décomposent facilement ; de plus, on s'est occupé de quelques problèmes commerciaux et financiers tels que ceux sur les intérêts simples, les mélanges et les alliages ; la théorie des proportions donne, comme on l'a vu précédemment, une solution élégante d'une série de questions au moyen des règles de trois et de partage ; nous exposerons ici la solution des problèmes plus compliqués de l'intérêt simple, de l'escompte en dehors et en dedans, de la rente, de la tare, des mélanges, des alliages, de l'échéance commune, des assurances et en général des quantités qui se calculent d'après un taux indiqué par tant pour 100 ou pour 1000 ; nous établirons quelques formules générales avec des applications numériques ; en particulier, nous étudierons les règles généralisées des mélanges et des alliages ; nous exposerons ensuite les calculs qui se présentent, dans les cas les plus simples, pour l'évaluation des surfaces et des solides ; nous résoudrons aussi quelques questions de physique et de chimie et, en particulier, celles relatives au poids d'un corps[1], enfin nous finirons par des problèmes qui, soit

1. Nouveau programme des mathématiques pour les athénées (arrêté royal du 30 août 1888).

Digitized by Google

à cause des termes originaux ou subtils de la question, soit à cause du résultat à trouver, soit encore à cause des moyens à employer, offrent de l'intérêt au point de vue pédagogique.

CHAPITRE I.

Problèmes qui se calculent d'après un taux indiqué par tant pour 100 ou pour 1000.

§ I. — Intérêts.

354. L'intérêt est le profit que rapporte une somme d'argent prêtée ou placée dans une entreprise. La somme prêtée est le *capital*; l'intérêt que rapportent 100 fr. par an s'appelle le *taux*; on l'indique par le signe °/₀ qu'on énonce *pour cent*[1].

355. L'intérêt d'un capital est proportionnel au montant du capital, au temps pendant lequel on le prête et au taux. Chaque question a pour but la détermination d'une de ces quatre grandeurs, quand on connaît les trois autres.

356. Représentons abréviativement, par i, l'intérêt d'un capital représenté par c, pendant un temps représenté par t (l'unité étant l'année) et placé à un taux (*revenu* de cent fr. par an) que nous représenterons par r. On établira facilement les expressions suivantes qui indiquent d'une manière concise les calculs à effectuer et qu'on appelle les *formules générales de l'intérêt simple* :

$$i = \frac{c \times r \times t}{100}, \quad c = \frac{100 \times i}{r \times t}, \quad r = \frac{100 \times i}{c \times t}, \quad t = \frac{100 \times i}{c \times r}.$$

Applications numériques.

357. I. — *Quel est le montant des intérêts de* 6700 *fr. à* 3,50 °/₀ *au bout de* 4 *ans?*

Solution : $i = \frac{6700 \times 3{,}5 \times 4}{100} = 938.$

---

1. Autrefois, au lieu d'indiquer l'intérêt d'une somme de 100 fr., on donnait la somme qui rapportait *un* fr. de rente par an ; ainsi, par exemple, si 20 fr. rapportaient un fr. par an, on disait que le placement était fait *au denier* 20.

Digitized by Google

II. — *Quelle est la valeur d'une propriété rapportant, tous frais payés, un revenu de* 1500 *fr. l'an ; le taux étant compté à* 6 °/₀*?*

Solution : $c = \frac{100 \times 1500}{6 \times 1} = 25000$ fr.

III. — *On demande à quel taux il faut placer une somme de* 100000 *fr. pour obtenir* 5250 *fr. d'intérêt au bout de* 9 *mois.*

Solution : $r = \frac{100 \times 5250}{100000 \times (\frac{9}{12})} = 7$ °/₀.

IV. — *Une personne a prêté* 3780,75 *fr. à quelqu'un moyennant* 4,5 °/₀ *d'intérêt annuel ; l'emprunteur, en restituant la somme, donne* 76,56 *fr. d'intérêt. Pendant combien de temps a-t-il gardé les* 3780,75 *fr. ?*

Solution :

$$t = \frac{100 \times 76{,}56}{3780{,}75 \times 4{,}5} = \frac{20416}{45369} \text{ d'année} = 5 \text{ mois } \frac{6049}{15123} = 5 \text{ m. } 12 \text{ j.}$$

EXERCICES.

1. Est-il plus avantageux de placer 23700 fr. à 4 °/₀ que de placer 8500 fr. à 3 °/₀ et le reste à 5 °/₀ ?

2. Quel est le capital qui, augmenté de ses intérêts à $4\frac{1}{2}$ °/₀, vaut 41350 fr. au bout de 270 jours ?

3. Un capital placé à $3\frac{1}{2}$ °/₀ rapporte 102,40 fr. de moins d'intérêt qu'un autre capital placé à 5 °/₀ et valant 130 fr. de moins que le premier. Quels sont les deux capitaux ?

4. On place un certain capital à un certain taux. Un an après, on retire le capital, on y joint 1000 fr., on le place à 1 °/₀ de plus, et le revenu annuel augmente de 40 fr. Au bout de l'an, on retire de nouveau le capital, on y joint 500 fr., on le place de nouveau à 1 °/₀ de plus que la 2e année, et le revenu annuel est encore augmenté de 70 fr. Trouver : 1° le capital primitif, 2° le premier taux, 3° les revenus successifs, et vérifier si les diverses conditions du problème sent remplies.

5. La différence de deux capitaux est de 63000 fr. ; le premier placé à 4,5 °/₀ et le second à 18 °/₀ donnent le même intérêt. Calculer les deux capitaux.

6. Deux capitaux sont entre eux comme 7 est à 9. Quel doit être le rapport des taux, 1° pour que les intérêts soient égaux, 2° pour qu'ils soient entre eux comme 4 est à 3 ?

Digitized by Google

§ II. — ESCOMPTE.

358. Dans la banque et le commerce, on nomme *billet* ou *effet* tout titre écrit portant indication d'une somme à payer à date fixe. On nomme *escompte* la déduction qu'on fait sur un billet qui est payé avant *l'échéance*. La somme marquée sur le billet est la *valeur nominale* ou le *montant* du billet. Cette même somme diminuée de l'escompte, est la *valeur actuelle* du billet.

Il y a deux espèces d'escompte : l'escompte *en dehors* ou escompte *commercial* et l'escompte *en dedans*.

I. — ESCOMPTE EN DEHORS.

359. Cet escompte est l'intérêt de la valeur nominale d'un billet, calculé à un certain taux et pour le temps qui doit s'écouler jusqu'au jour de l'échéance. Si l'on désigne par S la valeur nominale, par r le taux annuel de l'intérêt pour l'unité de temps, et par t le nombre des unités de temps jusqu'à l'échéance, enfin par E l'escompte en dehors, on aura une formule analogue à celle de l'intérêt

$$E = \frac{S \times r \times t}{100}$$

et l'on en déduira les mêmes conséquences.

II. — ESCOMPTE EN DEDANS.

360. Cet escompte que nous représenterons par E′ est l'intérêt, jusqu'au jour de l'échéance, de la valeur actuelle de la somme qu'on escompte ; on a donc

$$E' = \frac{(S - E') \times r \times t}{100}.$$

De cette formule on déduit d'abord

$$100 \times E' = S \times r \times t - E' \times r \times t ;$$

en augmentant les deux membres de $E' \times r \times t$ on obtient

$$E' \times 100 + E' \times r \times t = S \times r \times t \text{ ; donc enfin}$$

$$(100 + r \times t) \times E' = S \times r \times t, \text{ de sorte que}$$

$$E' = \frac{S \times r \times t}{100 + r \times t}.$$

Digitized by Google

361. Au moyen des formules qu'on vient de trouver, on établira les suivantes :

$$S = \frac{(100 + r \times t)\,E'}{r \times t}, \qquad r = \frac{100 \times E'}{(S - E') \times t}, \qquad t = \frac{100 \times E'}{(S - E') \times r}$$

et l'on traduira sans peine ces formules en langage ordinaire.

REMARQUES.

362. I. — On démontre comme suit que, dans les mêmes conditions, l'escompte en dedans est moindre que l'escompte en dehors ; en effet $E' = \frac{S \times r \times t}{100} \times \frac{100}{100 + r \times t} = E \times \frac{100}{100 + r \times t} < E$, car $100 < 100 + r \times t$.

363. II. — La différence entre l'escompte en dehors E et l'escompte en dedans E' est l'intérêt de celui-ci ; en effet,

$$E - E' = \frac{S \times r \times t}{100} - \frac{S \times r \times t}{100 + r \times t} = \frac{S \times r \times t}{100}\left(1 - \frac{100}{100 + r \times t}\right)$$

$$\frac{S \times r \times t}{100} \times \frac{r \times t}{100 + r \times t} = \frac{S \times r \times t}{100 + r \times t} \times \frac{r \times t}{100} = \frac{E' \times r \times t}{100}.$$

364. III. — A la règle d'escompte se rattache celle dite de *la tare*. La tare d'une marchandise est l'excès de son *poids ort* ou *brut* sur celui *net*, c'est-à dire indépendant des caisses et des autres enveloppes, au moyen desquelles on l'expédie. La tare s'évalue ordinairement comme l'escompte, c'est-à-dire à un taux déterminé.

Applications numériques.

365 I. — *Un banquier accepte d'escompter à* 0,50 *fr.* % *par mois, un billet dont la valeur nominale est de* 9000 *fr. et qui est payable dans* 3 *mois. Quelle somme le banquier paiera-t-il au porteur du billet ?*

Solution. — L'escompte $E = \frac{9000 \times 0.5 \times 3}{100} = 135$; donc le banquier paiera 9000 — 135 = 8865 fr.

Digitized by Google

II. — *On propose à un banquier d'escompter un billet dont la valeur nominale est de* 9000 *fr. et qui est payable dans* 3 *mois. Sachant que l'intérêt annuel que les capitaux peuvent rapporter est de* 5 %, *quel est l'escompte que le banquier devra retenir*[1] *?*

Solution. — L'escompte est $E' = \frac{9000 \times 0,5 \times 3}{100 + 0,5 \times 3} = 133$ fr.

§ III. — ÉCHÉANCE COMMUNE.

366. On appelle *échéance commune* ou *moyenne*, celle d'un billet unique équivalent à plusieurs billets à échéances diverses.

367. PROBLÈME. — *Trouver l'échéance unique d'un billet de* s *fr. payable dans* m *mois, d'un deuxième de* s' *fr. dans* m' *mois et d'un troisième de* s'' *fr. dans* m'' *mois, etc.*

Solution. — La valeur nominale du billet unique est $s + s' + s''$... et si l'on désigne par x le nombre des mois jusqu'à l'échéance du billet unique, les intérêts de celui-ci seront les mêmes que ceux de $(s + s' + s'' + ...)\, x$ au bout de *un* mois ; on trouvera de même que s fr. payables dans m mois produiront autant d'intérêts que $s \times m$ au bout de un mois et ainsi de suite ; de sorte qu'il faut que

$$(s + s' + s'' + ...)\, x = s \times m + s' \times m' + s'' \times m'' ...$$

ou plus simplement $x \times \Sigma (s) = \Sigma (s \times m)$; dans cette formule le signe Σ (sigma) indique la somme de tous les termes analogues à ceux qui sont écrits à côté du signe sommatoire.

Enfin on a : $x = \Sigma (sm) : \Sigma (s)$.

EXERCICES.

1. Sur un billet de 5900 fr., escompté à 4 %, on a retenu 37,04 fr. A combien de jours le billet était-il payable ?

2. Un billet de 500 fr., souscrit le 1er janvier et payable à la fin de l'année, a passé successivement entre les mains de trois personnes ; la première l'a reçu

---

1. Il faudra calculer cet escompte de manière que, si l'on additionne la valeur actuelle avec les intérêts de cette valeur jusqu'au jour de l'échéance, on obtienne pour somme la valeur nominale ; c'est donc l'escompte en dedans.

Digitized by Google

le 15 mars, la 2e le 10 juillet et la 3e le 30 septembre. Quelle était à ces trois époques la valeur réelle du billet, en calculant l'escompte d'après un taux annuel d'intérêt de 6 %?

3. Une personne ne peut s'acquitter immédiatement d'une dette qu'elle doit payer aujourd'hui ; son créancier accepte un billet de 12600 fr. payable dans 10 mois, et dans lequel on a tenu compte des intérêts à 6 % pour le retard. Quelle est la somme que doit actuellement cette personne? Que recevra en espèces le porteur du billet, s'il fait escompter immédiatement le billet, le taux de l'escompte étant de $3\frac{1}{2}$ %?

4. Une personne a souscrit un billet de 3000 fr. payable dans un mois, et un autre de 2500 fr. payable dans $2\frac{1}{2}$ mois. Elle veut les remplacer par un billet unique payable dans 2 mois. Quelle doit être la somme énoncée sur le billet, l'escompte étant calculé à 6 %?

5. Une marchandise pèse brut 575 kg ; la tare est de 8 %. On demande le prix de cette marchandise, si elle est achetée 117,50 fr. les 50 kg. net.

6. Une personne offre pour un billet de 763 fr. payable dans sept mois la somme de 735 fr. Quel est le taux de l'escompte : 1° dans l'hypothèse de l'escompte en dehors ; 2° dans celle de l'escompte en dedans ?

§ IV. — RENTES SUR L'ÉTAT.

368. Quand un gouvernement veut contracter un emprunt, il *émet des obligations* pour le montant du capital à emprunter. On dit, par exemple, qu'il émet ces obligations *au cours de* 90, s'il demande 90 fr. en argent pour une valeur nominale de 100 fr. L'obligation donne droit à la *rente*, c'est-à-dire aux intérêts, à un taux déterminé, de la valeur nominale. Les obligations peuvent être négociées; le prix de vente moyen, coté à la Bourse, s'appelle le *cours de la rente*. Généralement les emprunts sont éteints ou, comme on le dit ordinairement, *amortis* au bout d'un certain temps par le rachat, chaque année, d'un certain nombre d'obligations ; mais il y a aussi des titres de rente *nominatifs* qui sont inscrits au nom du possesseur et dont on peut toucher la rente indéfiniment ; c'est ce qu'on appelle des *rentes perpétuelles*.

Applications.

369. I. — *La rente* 3 % *étant au cours de* 94 *fr., quel capital faut-il débourser pour avoir* 2000 *fr. de rente?*

Solution :

Pour 3 fr. de rente il faut débourser 94 fr.

" 1 " " $\frac{94}{3}$ fr.

" 2000 " " $\frac{2000 \times 94}{3} = 62666,67$ fr.

Digitized by Google

ou bien, plus simplement, il faut débourser autant de fois 94 fr. qu'il y a de fois 3 fr. en 2000 fr.; on a la même formule.

II. — *En achetant du* $3\frac{1}{2}$ *%* *à* 102, *à quel taux réel place-t-on son argent?*

Solution. — 102 fr. rapportent 3,50 fr. d'intérêt;

$$2 \quad \text{"} \quad \frac{3{,}50}{51} \text{ fr.};$$

$$100 \quad \text{"} \quad \frac{50 \times 3{,}50}{51} \text{ fr.} = 3{,}43 \text{ fr.}$$

III. — *On achète, au cours de* 271,50 *fr., des obligations d'un chemin de fer qui sont remboursables à* 500 *fr. et qui rapportent* 15 *fr. d'intérêt. A quel taux place-t-on son argent, et quel bénéfice réalise-t-on sur six obligations dont l'une est sortie au tirage et dont les cinq autres sont revendues* 276 *fr. l'une?*

Solution. — L'obligation payée 271,50 fr. et rapportant 15 fr. d'intérêt donne un revenu de $\frac{100 \times 15}{271{,}50}$ fr. $= 5{,}52\frac{1}{2}$ %.

Les six obligations ont coûté $6 \times 271{,}50 = 1629$ fr.; l'une est remboursée 500 fr. et les cinq autres ont été revendues $5 \times 276 = 1380$ fr.; le bénéfice réalisé est $500 + 1380 - 1629 = 251$ fr.

EXERCICES.

1. Une personne avait 7200 fr. de rentes belges 4 %, achetées au cours de 102,50. Le taux de la rente ayant été converti en $3\frac{1}{2}$ % et au cours de 92,50 fr. on demande la perte éprouvée.

2. Quand la rente $4\frac{1}{2}$ % monte de 0,75 fr., quelle doit être proportionnellement la hausse du 3 %?

§ V. — CAISSE D'ÉPARGNE.

370. Une *Caisse d'épargne* a été établie en Belgique sous la garantie de l'État, par la loi du 16 mars 1865. Les versements sont reçus à la Caisse générale à Bruxelles, dans toutes les agences de la Banque nationale et dans tous les bureaux de poste.

Les versements doivent être de 1 fr. au moins et ne peuvent dépasser 5000 fr. Tout versement est productif d'intérêt à partir du 1er ou du 16 du mois qui suit le dépôt. Cet intérêt est calculé par mois et demi-mois, à 3 % par an ou $\frac{1}{4}$ % par mois[1].

1. Le taux de l'intérêt est fixé par le Conseil général sous l'approbation du ministre des finances.

Digitized by Google

Les intérêts ne se calculent pas sur les fractions de franc. Les fractions de centime ne sont aussi jamais portées en compte. Les intérêts acquis au 31 décembre de chaque année sont ajoutés au capital et deviennent, dès le lendemain, productifs d'intérêt.

Les remboursements ont lieu sans avis préalable pour toute somme n'excédant pas 100 fr. Le retrait des sommes supérieures à 100 fr. doit être demandé d'avance et dans un délai déterminé. Lorsqu'un déposant retire une somme déposée à la Caisse d'épargne, cette somme cesse d'être productive d'intérêt le 1er ou le 16 du mois qui précède le remboursement.

Application.

371. *Une personne a déposé à la Caisse d'épargne* 300 *fr. le* 31 *janvier* 1889, 150 *fr. le* 8 *avril et* 250 *fr. le* 22 *juin ; elle a retiré* 100 *fr. le* 7 *juillet et* 75 *fr. le* 4 *août, et a déposé de nouveau* 225 *fr. le* 15 *septembre. — Son compte a été réglé le* 31 *décembre de la même année et l'on demande la somme qui était inscrite alors sur le livret ?*

Solution. — On disposera les calculs comme suit :

DATES.	Versements fr.	Remboursements fr.	Temps écoulé au 31 décembre mois.	INTÉRÊTS DES Versements fr.	INTÉRÊTS DES Remboursements fr.
31 janvier 1889.	300,00	»	11	8,25	»
8 avril.	150,00	»	8 ½	3,18	»
22 juin.	250,00	»	6	3,75	»
7 juillet.	»	100,00	5 ½	»	1,37
4 août.	»	75,00	4 ½	»	0,84
15 septembre.	225,00	»	3 ½	1,96	»
Totaux.	925,00	175,00		17,14	2,21
	175.00	»		2,21	
Restes.	750,00			14,93	
Intérêts à ajouter.	14,93				
31 déc. 1889.	764,93				

Digitized by Google

EXERCICES.

1. Une personne a déposé à la Caisse d'épargne de l'État : 140 fr. le 11 février, 90 fr. le 6 mars, 220 fr. le 14 mai ; elle a retiré 100 fr. le 8 juin ; elle a replacé 250 fr. le 7 juillet et retiré 115 fr. le 26 août ; enfin replacé 30 fr. le 2 septembre. Faites le compte de cette personne à la fin de l'année.

2. Faites le compte de la même personne au bout de la 2e année, si elle verse pendant cette seconde année, toutes les semaines *un* fr. à la Caisse d'épargne.

§ VI. — QUELQUES QUESTIONS PARTICULIÈRES.

372. Problème I. — *Le montant d'une vente, déduction faite du prix de la commission à* $2\frac{1}{2}$ *%, est de* 728,30 *fr. Quelle est la somme payée pour la commission ?*

Solution. — 100 — 2,50 = 97,50 fr.

Quand il reste 97,50, la commission a été de 2,50.

" 1 " $\frac{2,50}{97,50}$.

" 728,30 " $\frac{728,30 \times 2,50 \text{ fr.}}{97,50} = 18,67 \text{ fr.}$

373. Problème II. — *Un libraire fait venir* 104 *volumes vendus* 13 *pour* 12 *avec* 20 *% de remise sur le prix fort qui est de* 2 *fr. le volume. Que doit-il ?*

Solution. — Il doit payer $\frac{12}{13} \times 104$ vol. = 96 volumes.

96 volumes à 2 fr. coûtent 192 fr. ; mais à cause des 20 % de remise, il ne paiera que $\frac{80}{100} \times 192$ fr = 153,60 fr.

374. Problème III. — *Un employé qui a un traitement annuel de* 1800 *fr. ne touche par mois que* 142,50 *fr. à cause de la retenue pour la caisse des veuves et orphelins. Quel est le taux de cette retenue ?*

Solution. — Il devrait recevoir 150 fr., donc on lui retient 150 142,50 = 7,50 fr. sur 150 ; d'où 0,5 sur 10 et 5 sur 100.

375. Problème IV. — *Un propriétaire fait assurer, contre les risques de l'incendie, sa maison qu'il évalue* 35,000 *fr., à raison de* 0,30 *fr.* ‰ *et son mobilier estimé* 4,500 *fr., à* 0,60 *fr.* ‰ ; *il paie de plus* 0,20 *fr.* ‰ *sur une somme de* 10,000 *fr. pour le garantir contre le recours des voisins. Que devra-t-il payer en tout pour sa prime d'assurance ?*

Digitized by Google

Solution. — 35000 fr. à 0,30 fr. ‰ font 10,50 fr.
4500 » à 0,60 » » 2,70 »
10000 » à 0,20 » » 2.00 »
Prime totale. . . 15,20 fr.

EXERCICES.

1. Une ménagère qui achète ses provisions en détail, dépense tous les jours, en moyenne, 2,80 fr.; si elle prenait ses provisions en gros, elle réaliserait, au bout de l'année, une économie de 4 %. Quelle serait cette économie ?

2. Un éditeur a livré à un libraire 154 exemplaires d'un certain ouvrage pour la somme nette de 392 fr. Il a donné un exemplaire de plus par dizaine, et en outre, il a fait un escompte de 20 % sur le montant de la facture pour le paiement au comptant. A quel prix le libraire doit-il revendre l'exemplaire pour avoir un bénéfice de 15 % ?

3. 300 kg. de café ont coûté 320 florins de Hollande. A quel prix, en marcs, devra-t-on revendre le kg., en Allemagne, pour gagner 20 % ? — On sait que 100 florins de Hollande valent 163 marcs ?

4. Combien de pence devrait coûter, en Angleterre, un gallon de lait au même prix, quand, en Allemagne, un litre coûte 18 deniers (100e partie du marc). On sait que 11 gallons = 50 litres; une livre sterling = 20,34 marcs; la livre sterling se divise en 20 schellings et le schelling en 12 pence.

5. Un cultivateur a acheté, à raison de 45 fr. l'are, une pièce de terre d'une superficie de 5 ha. 29 a. 20 ca. Il a ensemencé cette pièce de colza, et les frais de culture se sont élevés à 70 fr. les 42 ares. La récolte a produit 110 hl. 4 dl. de colza qu'on a vendu 0,25 fr. le l. On demande ce que cette propriété rapporte pour cent, déduction faite des frais de culture.

6. En France, les compagnies de chemin de fer perçoivent par km. pour le transport des voyageurs 12,32 centimes en 1re classe, 9,24 c. en 2e classe et 6,776 c. en 3e classe. Ces prix se composent : 1° de la part qui revient aux compagnies ; de l'impôt de 12 % établi par la loi du 7 juillet 1855 ; 3° de l'impôt de 10 % établi par la loi du 16 septembre 1871, lequel frappe non seulement la somme qui revient aux compagnies, mais encore l'impôt déjà existant. D'après les conventions conclues en 1883 entre l'Etat et les six grandes Compagnies de chemin de fer français, du jour où l'Etat supprimera l'impôt de 1871, les Compagnies, de leur côté, réduiront de 10 % pour la 2e classe et de 20 % pour la 3e classe les prix qu'elles perçoivent pour leur propre compte. Sur quelle base kilométrique se paieront alors les voyages effectués en 2e et en 3e classe ?

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Problèmes de mélange et d'alliage[1].

376. Ces problèmes ont pour objet de trouver :

1° La valeur moyenne de plusieurs choses, connaissant le nombre et la valeur particulière de chacune d'elles ; 2° la quantité de chaque espèce qui entre dans un mélange, connaissant la valeur de chaque espèce et la valeur totale du mélange.

377. Quand plusieurs métaux sont fondus ensemble, le mélange s'appelle *alliage*. Pour les monnaies, par exemple, on fond généralement un peu de cuivre avec l'or ou l'argent. Le *titre* d'un alliage est le rapport du poids du métal fin au poids total de l'alliage ; ou, ce qui revient au même, c'est la quantité de métal fin dans l'unité de poids de l'alliage.

378. Problème I. — *On fait un mélange de* A *kg. à* m *fr.* A′ *kg. à* m′ *fr.* ; A″ *kg. à* m″ *fr.*..... *Quel est le prix d'un kg. du mélange ?*

Solution. — Ce prix est $\frac{A \times m + A' \times m' + \ldots}{A + A' + \ldots} = \frac{\Sigma(A \times m)}{\Sigma(A)}$.

379. Problème II. — *On a une denrée à* m *fr. le kg. et une autre à* m′ *fr. le kg. ; dans quelle proportion faut-il mélanger les deux denrées pour obtenir un mélange à* M *fr. le kg. ?*

Solution. - Soit x le nombre de kg. qu'on prendra de la première denrée et y celui de la 2e denrée ; il est facile d'établir l'égalité

$$m \times x + m' \times y = M \times x + M \times y$$

d'où, si l'on suppose $m > m'$,

$$(m - M) \times x = (M - m') \times y ;$$

donc enfin $x : y = M - m' : m - M$ ou bien $x : M \quad m' = y : m - M$, donc x et y sont proportionnels à $M - m'$ et $m - M$.

Si P est le poids total du nouveau mélange, on a:

$$x : M - m' = y : m - M = x + y \text{ ou } P : m - m',$$

1. Voir mon *Précis d'Arithmétique,* livre III, ch. III.

Digitized by Google

d'où $$x = \frac{(M - m') \times P}{m - m'} \quad \text{et} \quad y = \frac{(m - M) \times P}{m - m'}.$$

380. Problème III. — *Un marchand veut mélanger trois denrées à* 60, 45 *et* 40 *centimes le gr., de manière que le gr. du mélange revienne à* 55 *c. Combien doit-il prendre de gr. de chaque espèce ?*

Solution. — Ce problème est *indéterminé*, c'est-à-dire qu'il admet une infinité de solutions. On peut avoir une de ces solutions de la manière suivante : en vendant un gr. de 60 c. à 55 c., le marchand perd 5 c. par gr.; en vendant 1 gr. à 45 c. il gagne 10 c., et en vendant 1 gr. 40 c. il gagne 15 c. ; le gain serait de 10 + 15 = 25 c. et la perte de 5 c., quand il vend, à 55 c., un gr. de chaque denrée. Or, la différence ne peut être compensée que par l'emploi de gr. à 60 c. ; donc, avec 1 gr. de 40 c. et 1 gr. de 45, il doit prendre autant de gr. à 60 c., qu'il y a de fois 5 en 25, ce qui fait 5 gr. à 60 c. En multipliant ces nombres par 2, 3,. . on a encore une infinité d'autres solutions.

EXERCICES.

1. Un commerçant a du vin à 1,10 fr. le litre et du vin à 0,80 fr. Combien devra-t-il mêler de la seconde qualité à 24 hl. de la première, pour qu'en ajoutant 20 litres d'eau par hl., il obtienne un mélange valant 0,60 fr. la bouteille de 75 cl ?

2. On met dans un haut-fourneau 7,8 tonnes de minerai de fer qui rend 28 °/₀ de fonte, avec 6,7 tonnes d'un autre minerai de fer de *teneur*[1] inconnue. On obtient par là 3527 kg. de fonte. On demande dans quel rapport on doit mélanger les deux minerais pour obtenir un mélange dont la richesse soit $\frac{1}{4}$.

3. On a trois alliages d'or aux titres de 0,750, 0,840, 0,920 ; on demande quel poids on doit prendre de chacun d'eux pour obtenir un alliage pesant 4,500 kg. au titre de 0,890. Le poids du métal tiré du premier lingot est au poids du métal tiré du second dans le rapport de 2 : 7.

4. L'unité de monnaie étant le franc d'argent, au titre de 0,900, trouver la valeur réelle, ou au pair, de la pièce d'argent de 1 fr., qui est au titre de 0,835.

5. On sait que 5 gr. d'argent monnayé, au titre de 0,900, valent 1 fr. et que l'or monnayé vaut, à poids égal et à titre égal, 15 $\frac{1}{2}$ fois plus que l'argent. De plus, la retenue à opérer, pour frais de fabrication des monnaies d'or et d'argent, sur les matières versées au change, est fixée, en France et en Belgique, à 1,50 fr. par kg. d'argent au titre de 0,900 et à 6,70 fr. par kg. d'or au même titre. Trouver : 1° le prix d'un kg. d'or ou d'argent monnayé, au titre de 0,900 ; 2° le prix, au change, d'un kg. d'or ou d'argent, au titre de 0,900 ; 3° le prix, au change, d'un kg. d'or ou d'argent pur.

6. On a acheté trente pièces de gibier pour 30 fr. Un lièvre coûte 2,50 fr., une perdrix 1,75 fr. et une caille 0,50 fr. Combien en a-t-on eu de chaque sorte ?

7. Combien faut-il prendre d'or et d'argent dont les unités de poids pèsent $\frac{30}{36}$ et $\frac{24}{36}$ dans l'eau, pour constituer un alliage de 36 kg. ne pesant que 23 dans ce liquide, c'est à-dire l'unité de poids étant $\frac{28}{30}$ dans l'eau.

---

1. La teneur est le tant pour cent du métal contenu dans un minerai.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Problèmes relatifs à quelques sciences.

§ I. — GÉOGRAPHIE ET COSMOGRAPHIE.

381. PROBLÈME I. — *Un voyageur règle sa montre à Paris; de combien de minutes sera-t-elle en retard quand il arrivera à Turin, sachant que cette ville est à* 5°20′ *à l'est de Paris.*

Solution. — 5°20′ valent 320′. L'équateur entier (360°) passe devant le soleil en 24 heures; en 1 heure il passera 360 : 24 = 15°; ces 15° valent 15 × 60′ qui passent devant le soleil en 60′ de temps; en 1′ il en passera 15 × 60 : 60 ou 15′; par suite, le nombre de minutes de retard sera fourni par le quotient de 320 : 15, qui est 21′20″.

382. PROBLÈME II. – *Une dépêche est envoyée de Londres à San-Francisco, par le télégraphe transatlantique, le* 10 *juillet à* 4^h 12′ *du matin, heure de Londres. Elle subit à Valentia, pour réexpédition, un retard de* 17′. *Reçue à New-York, elle est réexpédiée directement pour San-Francisco avec un nouveau retard de* 19′. *Trouver quelle indication de date et d'heure de réception elle devra porter dans les deux villes de New-York et de San-Francisco, dont les horloges sont réglées sur leur propre méridien, sachant que les longitudes toutes trois occidentales de ces villes sont : pour Londres,* 2° 26′; *pour New-York,* 76° 20′; *pour San-Francisco,* 124° 45′.

Solution. — Le soleil, dans son mouvement autour de la terre, met 24 heures pour décrire l'équateur entier ou 360°; pour décrire 1°, il emploira 24^h : 360 = 4′, et pour décrire 1′, il emploira 4″.

La distance entre les méridiens de Londres et de New-York est de 73° 54′; pour parcourir cet espace, le soleil mettra 73 × 4′ + 54 × 4″ = 4^h 55′ 36″.

La dépêche qui devait partir à 4^h12′, à cause du retard à Valentia, n'est partie qu'à 4^h 29′ et n'est arrivée à New-York qu'à 4^h 29′ heure de Londres.

L'heure de New-York, au moment de son arrivée, était de 4^h 29′ — 4^h 55′ 36″ = 11^h 33′ 24″ du soir du 9 juillet.

Digitized by Google

La dépêche ne part ensuite pour San-Francisco que 19′ après, c'est-à-dire à $11^h\,52'\,24''$.

La distance entre les méridiens de San-Francisco et de New-York est de 124° 45′ — 76° 20′ ou 48° 25′. Pour parcourir cette distance, le soleil mettra $48 \times 4' + 25 \cdot 4''$ ou $3^h\,13'\,40''$: ce temps exprime le retard de l'heure de San-Francisco, sur l'heure de New-York. Par conséquent l'heure de San-Francisco au moment de l'arrivée de la dépêche sera de $11^h\,52'\,24'' - 3^h\,13'\,40'' = 8^h\,38'\,44''$.

Réponse. — 1° La dépêche est arrivée à New-York le 9 juillet à $11^h\,33'\,24''$ du soir et à San-Francisco le 9 juillet à $8^h\,38'44''$ du soir.

383. Problème III. — *On suppose que les deux planètes Vénus et la Terre sont sur un même rayon partant du Soleil, de sorte que Vénus se trouve entre la Terre et le Soleil, et on demande après combien de temps ce phénomène se reproduira. On sait que la Terre accomplit sa révolution autour du Soleil en* 365 *jours* 2563744, *tandis que Vénus accomplit la sienne en* 224 *jours* 7007869. *On devra exprimer le résultat en jours, heures, minutes et secondes.*

Solution. Pour que Vénus vienne de nouveau se mettre en conjonction avec la Terre, il faut qu'elle gagne sur celle-ci une avance d'une circonférence entière ; or, en un jour, Vénus parcourt une fraction de la circonférence représentée par 1 : 224,7007869, la Terre une fraction égale à 1 : 365,2563744. Vénus prend en un jour une avance, en fraction de la circonférence, de la différence de ces 2 quotients, soit :

$$\frac{365{,}2563744 - 224{,}7007869}{365{,}2563744 \times 224{,}7007869}$$

et pour prendre une avance de toute une circonférence, il faudra un nombre de jours égal à l'inverse de cette fraction, c'est-à-dire $365{,}2563744 \times 224{,}7007869 : 140{,}5555875$ ou 583 jours 22 h. 6 m. $\frac{1}{2}$.

EXERCICES.

1. Quelle est la longueur qui correspond 1° à un degré, 2° à une minute, 3° à une seconde du méridien terrestre ?

2. La longitude de Corté (Corse) est 6° 49′ E ; la longitude de Brest est 6° 49′ 42″ O. On demande : 1° quelle heure il est à Brest quand il est midi à Corté ; 2° quelle heure il est à Corté quand il est midi à Brest ; 3° quelle heure il est à Corté et à Brest quand il est midi à Paris.

Digitized by Google

§ II. — GÉOMÉTRIE[1].

384. Problème I. — *Un jardin a la forme d'un trapèze ; un des côtés parallèles a 10 mètres de longueur, la distance à l'autre côté est de 4 mètres ; enfin la surface vaut 32 mètres carrés. Quelle est la longueur du second côté parallèle ?*

Solution. La surface est le produit de la distance des côtés parallèles par la demi-somme de ceux-ci ; donc cette demi-somme vaut $32 : 4 = 8$; la somme vaut 16 et le côté demandé a pour longueur $16 - 10 = 6$ mètres.

385. Problème II. — *Calculez le rayon d'un cercle dont la surface soit la somme des surfaces de deux cercles qui ont respectivement des rayons longs de 20 et 21 mètres.*

Solution. La surface d'un cercle s'obtient en multipliant un nombre constant qu'on représente par π et qui vaut environ 3,14159 par le carré du rayon. Cela posé, soit x le rayon demandé ; on aura $\pi x^2 = \pi 20^2 + \pi 21^2$ ou plus simplement $x^2 = 20^2 + 21^2 = 841$; d'où $x = \sqrt{841} = 29$ mètres.

386. Problème III. — *On a employé 880 centimètres cubes d'or pour dorer une sphère de 75 centimètres de diamètre. Quelle est l'épaisseur de la dorure ?*

Solution. — La surface d'une sphère s'obtient en multipliant le quadruple du nombre π par le carré du rayon, ou ce qui revient au même le nombre π par le carré du diamètre, ce qui fait $3,14159 \times 75^2$; d'ailleurs cette surface, multipliée par l'épaisseur de la couche de dorure, donne le volume de l'or employé, c'est-à-dire 880 centimètres cubes ; donc l'épaisseur demandée est $880 : 3,14159 \times 75^2 = 0,0497 = 0,497^{mm}$ ou un demi-millimètre environ.

EXERCICES.

1. A 2 h. 17' quel est l'angle compris entre l'aiguille marquant l'heure et celle marquant les minutes ?

2. Une ardoise encadrée a une longueur totale de 40 cm. et une largeur de 28 m. ; le cadre a 4 cm. de largeur. Calculer la surface totale, celle du cadre et celle de la partie visible de l'ardoise.

3. Une pièce de terre a 145 m. de longueur et 87,50 m. de largeur. Quel est le loyer à 1,20 fr. l'are ?

---

1. Le professeur aura soin d'exposer les formules.

Digitized by Google

4. On veut tapisser une chambre de 6 m. de long, 5 de large et 4,20 m. de haut ; il y a une porte qui a 2 m. de haut et 0,90 m. de large ; le manteau de la cheminée a 1,20 m. de large et 1 m. de haut ; enfin la cheminée a une largeur de 0,9 m. et fait une saillie de 0,30 m. Chaque rouleau de papier a 12 m. de longueur et 0,50 m. de large et coûte 2,75 fr. Quelle sera la dépense totale, le collage coûtant 0,30 fr. par rouleau ?

5. Une roue a 1,26 m. de diamètre. Quel est le poids du bandage à 10 kg. le m.?

6. Un cirque a un diamètre de 55 m. Quelle est 1° la circonférence, 2° la surface ?

7. Trouver le rayon d'un cercle équivalent à un carré de 3 m. de côté ?

8. La longueur de la petite aiguille d'une pendule est de 5 cm. Quelle est la longueur parcourue par l'extrémité au bout de 24 h. ?

9. Calculer la hauteur d'un cylindre ayant une capacité de 0,1 mètre cube et un rayon de base de 0,15 mètre.

10. Une feuille de papier a 22 cm. de longueur et 18 cm. de largeur ; on l'enroule de manière à former d'abord un cylindre de 22 cm. de hauteur et puis un autre de 18 cm. de hauteur. Quel rapport y a-t-il entre les volumes des cylindres ?

11. Quelles sont les dimensions d'un cylindre dont la capacité est d'un litre et dont la hauteur est le double du diamètre de la base ?

12. Quelle est, en km. carrés, la superficie de la Terre (le rayon = 6370 km.)?

§ III. — PHYSIQUE ET CHIMIE.

387. Problème I. — *On a pesé, à la même température, un fragment de métal successivement dans l'air, dans l'eau et dans un liquide* A ; *on a trouvé* 1° 5,219 *grammes*, 2° 4,132 *gr. et* 3° 5,005 *gr. On demande le poids spécifique du métal et celui du liquide* A.

Note. — Nous appellerons poids spécifique d'un corps le rapport entre le poids de ce corps et le poids d'un égal volume d'eau ; enfin tout corps plongé dans un liquide perd une partie de son poids égale au poids du liquide déplacé. (Principe d'Archimède.)

Solution. — Soit D le poids spécifique 5,219 — 4,132 = 1,087 gr. ; c'est le poids du volume d'eau déplacé ; donc D = 5,219 : 1,087 = 4,709.

Soit aussi D' le poids spécifique absolu du liquide A, en raisonnant de la même manière on aura : 5,219 — 5,005 = 0,214 g., donc D' = 0,214 : 1,087 = 0,196.

388. Problème II. — *Le poids spécifique absolu du mercure est* 13,598 *et celui du fer forgé* 7,788. *Cela posé,*

Digitized by Google

on demande quel est le volume de la partie submergée d'un morceau de fer qui flotte sur le mercure.

Note. — Quand un corps flotte sur un liquide, le poids du liquide déplacé est précisément égal au poids total du corps flottant.

Solution. — Soit V le volume demandé, alors le poids du mercure déplacé est V × 13,598 ; soit V' le volume total du morceau de fer, son poids est V' × 7,788 ; donc V × 13,598 = V' × 7,788, d'où $V = \frac{7,788}{13,598} \times V' = 0,572 \times V'$, de sorte que les 0,572 ou plus de la moitié du morceau de fer sont submergés.

389. Problème III. — *On demande le poids d'une colonne de marbre, de forme cylindrique, qui a* 6,75 *m. de hauteur et* 0,65 *m. de diamètre.*

Note. - Le poids spécifique du marbre est 2,72 et le volume d'un cylindre s'obtient en multipliant la surface du cercle de la base par la hauteur.

Solution. — Le volume de la colonne $= \frac{1}{4} \times 3,142 \times \overline{0,65}^2 \times 6,75$ = 2.240 m. c. = 2240 dm. c. ; le poids = 2240 × 2,72 kg. = 6092 kg.

390. Problème IV. — *La masse du soleil égale* 336149 *fois celle de la terre, et son rayon* 108,7 *fois celui de la terre. Calculer quel serait, à la surface du soleil, le poids d'un corps qui pèse un kg. à la surface de la terre ?*

Note Des corps de forme sphérique attirent un même corps placé sur leurs surfaces en raison inverse des carrés de leurs rayons et proportionnellement à leurs masses.

Solution. Un corps de 1 kg. placé sur la surface de la terre est attiré par celle-ci avec une force de *un* kg. ; sur la surface d'une sphère qui a un rayon 108,7 fois plus grand que le rayon terrestre, l'attraction n'est plus que 1 kg. : $(108.7)^2$; mais si la nouvelle sphère a une masse 336149 fois plus grande, l'attraction devient 336149 kg. : $(108.7)^2$ = 28,456 kg.

391. Problème V. — *100 kg. de sucre donnent 51,4 kg. d'alcool absolu, ne contenant plus d'eau ; d'autre part, 100 k. de moût de raisin donnent 21,2 kg d'alcool avec* $\frac{4}{5}$ *de son poids d'eau. Combien 100 kg. de moût contiennent-ils de kg. de sucre ?*

Solution. — 100 kg. de moût donnent 21,2 kg. d'alcool avec $\frac{4}{5}$ de son poids d'eau, donc 21,2 : 5 = 4,24 d'alcool absolu.

51,4 kg. d'alcool absolu donnent 100 kg. de sucre, donc 4,24 kilogr. d'alcool absolu ou 100 kilogr. de moût donnent

$$\frac{4,24 \times 100}{51,4} = 8,24 \text{ kg. de sucre.}$$

Digitized by Google

392. Problème VI.— *On a* 25 *barriques de vin de* 228 *litres chacune, marquant* 9° *à l'alcoomètre, c'est-à-dire contenant* 9 % *d'alcool pur. Combien faut-il ajouter d'alcool à* 90° *pour obtenir du vin à* 15° *?*

Solution. = On a 25 × 228 ou 5700 litres de vin dans lequel il y a 9 × 5700 : 100 = 513 litres d'alcool supposé pur.

Pour que ce vin marque 15°, il faut qu'il contienne 15 × 5700 : 100 = 855 litres d'alcool pur ; dont il manque 855 — 513 ou 342 litres. Mais l'alcool employé, ayant 90 % d'alcool, ne contient que 75 % d'alcool de plus qu'on ne le désire dans le mélange ; donc, quand on mettra 1 litre d'alcool, on n'augmentera que de 0,75 l. la richesse du mélange ; comme on doit l'enrichir de 342 litres, il faudra mettre 342 : 0,75 ou 456,2 l. d'alcool à 90°.

393. Problème VII. — *La réaction qui donne naissance à l'hydrogène se passe entre un atome de zinc pesant* 65 *et une molécule d'acide sulfurique pesant* 98 *; elle fournit une molécule hydrogène ou un poids* 2. *On demande quels poids de zinc et d'acide sulfurique il faut employer pour obtenir* 100 *litres d'hydrogène à* 0° *et à la pression de* 760^{mm} *de mercure, la densité de l'hydrogène étant* $\frac{1}{14,44}$ = 0,069.

Solution :

1 l. d'air à 0° et à la press. de 770^{mm} pèse 1,293 g ;
1 l. d'hydrogène » » 0,069 × 1,293 = 0,089 g.
100 l. » » » 100 × 0,089 = 8,9 g.
2 g. d'hydrog. prov. de 65 g. de zinc et de 98 g. d'acide sulf.
1 » » » $\frac{65}{2}$ g. » et de $\frac{98}{2}$ g. » »
8,9 » » 8,9 × 32,5 g. » et de 8,9 × 49 g. » »
donc 8,9 » » 289,25 g. » et de 436,1 g » »

394. Problème VIII. — *La solution normale d'acide sulfurique contient un équivalent ou* 49 *g. et la solution normale de carbonate de sodium contient* 53 *g. par litre. On pèse* 49 *g. d'une soude de commerce qu'on fait dissoudre dans un litre d'eau distillée. On trouve par le tournesol que* 100 *centimètres cubes de cette solution sont saturés par* 75 *cm³ de l'acide. Quel est le titre de la soude proposée ou quelle quantité pour cent renferme-t-elle de carbonate de sodium ?*

Digitized by Google

Solution. – Il est clair que 1 cm³ de l'acide normal sature exactement 1 cm³ de la solution normale de carbonate de sodium. Si donc le carbonate proposé était pur, pour saturer les 100 cm³ de la solution, il faudrait 100 cm³ de l'acide normal et le titre serait 100. Donc s'il ne faut que 75 cm³ pour cette saturation, le titre sera de 75.

395. Problème IX. — *La valeur d'un chlorure de chaux est évaluée en degrés d'après la méthode de Gay-Lussac. Chaque degré représente un litre de chlore à 0° et à la pression de 760mm. Le chlorure à 100° peut fournir par kg. 100 litres de chlore ou, en poids, sa composition est de 31,8 de chlore pour cent. La solution décime normale d'acide arsénieux contient 9,9 g. par litre. Un centimètre cube de cette solution correspond à 0,0071 g. de chlore. Dans 10 cm³ de cette solution additionnée de sulfate d'indigo, on verse pour la décolorer 45 cm³ d'une solution de 100 g. de chlorure de chaux dans un litre d'eau. Quel est le titre de ce chlorure ?*

Solution :

1000 cm³ de la solution du chlorure contiennent 100 g. de chlorure.
1 " " " " 0,1 g. "
45 " " " " 4,5 g. "

Les 10 cm³ de la solution décime normale d'acide arsénieux correspondent à 0,071 de chlore : donc

4,5 g. de chlor. de chaux contiennent 0,071 g. de chlore.
1 " " " " $\frac{0,071 \text{ g.}}{4,5}$ "
1000 " " " " $\frac{1000 \times 0,071 \text{ g.}}{4,5} = 15,8 \text{ g.}$ "

Or 1 litre de chlore pèse 3,18 g. ; il y aura donc $\frac{15,8}{3,18} = 4,9$ litres.

Le titre est de 4,9.

EXERCICES.

1. Une pierre parcourt 4,9 m. dans la première seconde de sa chute, et le chemin qu'elle parcourt augmente comme le carré du nombre des secondes. Quel est le chemin parcouru en 6 secondes ?

2. La durée des oscillations d'un pendule est proportionnel à la racine carrée de la longueur de ce pendule. Deux pendules ayant, l'un 961 millimètres et l'autre 841mm, on veut savoir dans quel rapport seront les nombres d'oscillations faites en un jour par les deux pendules.

Digitized by Google

3. Le son parcourt 338 mètres par seconde. Cela posé, on veut connaître la profondeur d'un puits, en y laissant tomber une pierre ; on entend le bruit de son arrivée au fond $4\frac{1}{2}$ secondes après son départ. On demande quelle est la profondeur du puits.

4. La lune est éloignée de la terre d'environ 86000 lieues de 4444 m. A cette distance, elle procure la même ombre qu'une bougie placée à 6 m. de l'écran interposé entre la lune et la bougie, de manière que les ombres de droite et de gauche soient également noires. Combien la lumière de la lune vaut-elle de fois la lumière de la bougie? On sait que les intensités sont en raison inverse du carré de la distance.

5. Un corps poreux a 0,952 pour le poids spécifique et son volume est de 17 décimètre cubes. Combien doit-il absorber d'eau pour tomber au fond du liquide ?

6. Réduire 50° Fahrenheit en degrés centigrades. On sait que le thermomètre à mercure est accompagné d'une échelle graduée de la manière suivante : on prend deux points de repère, l'un pour l'eau bouillante, l'autre pour la glace fondante ; on divise l'espace compris entre les repères en 100 parties égales qui sont appelées degrés ; le 0 est au point fixe de la glace fondante ; ce mode de division est appelé *centigrade ;* en Angleterre, on se sert de la division *Fahrenheit* pour laquelle la même distance comprend 180 divisions et le point de la glace fondante correspond à 32.

7. Un kg. de glace à 0° centigrade étant mélangé avec un kg. d'eau à 79° produit deux kg. d'eau à 0°, d'après cela, on demande la température du mélange de 4 kg. d'eau à 50° avec 2 kg. de glace à 0°.

8. Une molécule ou 122,6 de chlorate de potassium donne 3 atomes ou 48 d'oxygène. Combien de chlorate faut-il employer pour avoir 100 litres d'oxygène à 0° et à la pression de 760^{mm} de mercure, la densité de l'oxygène étant de 1,1056 ?

9. La solution décime normale d'iode contient 12,7 g. d'iode dissous dans un litre d'eau à la faveur de 18 g. d'iodure de potassium. Un cm^3 de cette solution correspond à 0,0017 d'acide sulfhydrique. Au moyen d'empois d'amidon on constate qu'il faut verser dans une liqueur 65 cm^3 de la solution décime normale d'iode pour saturer l'acide sulfhydrique qu'elle contient. Combien renferme-t-elle d'acide sulfhydrique ?

CHAPITRE IV.

Problèmes sur la science du droit[1].

396. Problème I. — *Une rente viagère de 250 fr. par trimestre est constituée, à titre gratuit, par* A *au profit de*

1. Je dois ces questions à l'obligeance de M. De raedt, receveur de l'Enregistrement et des Domaines à Lokeren. On trouvera un très grand nombre de problèmes de ce genre dans le *Petit manuel pour l'ouverture des successions*, par L.-J. Van Reyschoot. Bruxelles, 1889.

Digitized by Google

son frère B, *et le droit d'enregistrement dû sur cet acte s'élève à* 3,40 °/₀ *sur* 10 *fois la rente annuelle. Quel est le montant de ce droit ?*

Solution. — La rente annuelle est 4 × 250 = 1000 fr. : le droit est de 3,40 °/₀ sur 10 × 1000 fr. = 10000 fr. ; donc il s'élève à 100 × 3,40 fr. = 340 fr.

397. Problème II. — *Une maison d'une valeur vénale de* 10000 *fr., est donnée par un père à son fils. Cette maison a un revenu cadastral de* 400 *fr. et le chiffre multiplicateur fixé par le Gouvernement est* 20. *Liquider le droit dû :* 1° *sur la valeur vénale ;* 2° *sur la valeur obtenue au moyen du multiplicateur.*

Note. — Une donation immobilière en ligne directe est passible d'un droit d'enregistrement de 1,40 °/₀ sur la valeur vénale de l'immeuble ou sur la valeur obtenue au moyen de la multiplication du revenu cadastral par le chiffre déterminé par le gouvernement.

Solution.

1° 1,40 °/₀ sur la valeur vénale font 100×1,40 fr. = 140 fr. 2° en employant le multiplicateur 20, le revenu cadastral devient 20 × 400 fr. = 8000 fr. ; et 1,40 °/₀ de cette somme font 80 × 1,40 fr. = 112 fr.

398. Problème III. — *En* 1889, X *ouvre à* Y, *qui constitue hypothèque, un crédit de* 10000 *fr., crédit qui se réalise en* 1890 *jusqu'à concurrence de* 5000 *fr. Liquider les droits dus en* 1889 *et ceux exigibles en* 1890.

Note. — Une ouverture de crédit sur gage ou hypothèque est passible immédiatement : 1° d'un droit d'enregistrement de 0,65 °/₀ sur le capital pour lequel il y a gage ou hypothèque ; 2° d'un droit d'inscription hypothécaire de 0,65 °/₀₀ sur la même somme. Lors de la réalisation du crédit ces droits sont complétés respectivement jusqu'à concurrence de 1,40 °/₀ et de 1,30 °/₀₀.

Solution. En 1889 il est dû :

0,65 °/₀ sur 10000 fr.	=	65 fr.
0,65 °/₀₀ » 10000 »	=	6,50
Ensemble		71,50 fr.

En 1890, il sera dû :

0,75 °/₀ sur 5000 fr.	=	37,50 fr.
0,65 °/₀₀ » 5000 »	=	3,25 »
Ensemble		40,75 fr.

Digitized by Google

399. Problème IV. — *Indiquer le droit dû sur la cession d'une créance de* 1000 *fr. produisant intérêt à raison de* 5 °/₀ *l'an. Le cessionnaire touchera les intérêts à compter de la dernière échéance,* 15 *mars, et la cession a lieu le* 30 *septembre suivant. La cession est faite moyennant le prix de* 1000 *fr.*

Note. — Le droit d'enregistrement dû du chef d'une cession de créance est de 1,40 °/₀ sur le montant du capital et des intérêts cédés, quel que soit le prix stipulé. Le droit qui est dû sur ces sommes est calculé de 20 en 20 fr. en forçant la dernière fraction, et chaque mois compte 30 jours.

Solution — Le capital cédé est de 1000 fr. ; les intérêts annuels à 5 °/₀ s'élèvent à 10 × 5 = 50 fr., et du 15 mars au 30 septembre soit pour 6 ½ mois, le montant des intérêts est de 25 + 2,08 = 27,08 fr. ; donc le capital et les intérêts font ensemble 10 27,08 fr. et en forçant la fraction de 20 fr., il est dû un droit de 1,40 °/₀ sur 1040 fr. = 1040 × 1,40 fr. = 14,56 fr.

400. Problème V. – *Un notaire procède à une vente de meubles qui comprend* 200 *lots et qui rapporte en tout* 4520 *fr. ; le notaire avait stipulé dans les conditions de la vente :* 25 *centimes par lot pour frais de criée et* 10 °/₀ *sur le montant de chaque adjudication pour frais généraux. Quel est le droit d'enregistrement dû sur la vente ?*

Note. — Le droit d'enregistrement dû sur une vente publique de meubles se calcule à raison de 2,70 °/₀ sur le produit total de la vente augmenté des charges. Ne sont pas considérés comme charges : 1° le droit d'enregistrement et 2° les honoraires du notaire qui s'élèvent à 0,75 °/₀ pour une vente qui ne produit pas plus de 10000 fr. La perception du droit suit les sommes qui y sont soumises de 20 en 20 fr., sans fraction.

Solution. — Le produit total de la vente est de 4520 fr.

Les frais généraux sont de 10 °/₀ dont il faut déduire 2,70 °/₀ pour le droit d'enregistrement et 0,75 °/₀ pour les honoraires du notaire ; il reste 10 3,45 = 6,55 °/₀ sur 4520, soit 45,20 × 6,55 fr. = 296,06 fr.

200 lots à 0,25 fr. rapportent 50 fr.

Donc en tout le capital et les charges font 4520 + 296,06 + 50 = 4866,06.

Le droit est donc dû sur 4880 francs et s'élève ainsi à 48,80 × 2,70 fr. = 131,76 fr.

401. Problème VI. — A *décède et laisse pour héritiers légaux son frère* B, *pour un tiers, ses neveux* C *et* D, *enfants de* X, *aussi pour un tiers, enfin ses neveux* E, F, G, I *enfants*

Digitized by Google

de Z *pour le dernier tiers. Par testament, il a donné à* G, *hors part, un quart de la succession. L'actif imposable dépendant de la succession de* A *s'élève à* 30000 *fr. Calculez les droits auxquels cet actif donne ouverture.*

Note. — Le droit dû par le frère et les neveux s'élève respectivement à 6,80 % et 8,20 % sur ce qu'ils recueillent dans les limites de leur part légale, et à 13,80 % sur ce qu'ils reçoivent au-delà de cette part.

Solution. — L'actif imposable est de 30000 fr. ; de sorte que la part légale de chaque souche serait de 10000 fr. ; G a un quart de la succession par testament, soit 7500 fr. ; il reste à partager 30000 — 7500 fr. = 22500 fr., dont le tiers est 7500 et le quart de ce tiers revenant à G est 1875 fr.

Le frère recueille 7500 fr. ; C et D recueillent aussi ensemble 7500 fr. ; E, F, I recueillent $\frac{3}{4} \times 7500 = 5625$ fr. ; enfin G recueille $7500 + 1875 = 9375$, sa part légale est de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ de 30000, soit 2500 fr. ; il a donc 6875 fr. hors part.

Tableau des droits :

Le frère	6,80 % sur 7500 fr.	= 75	× 6,80 fr. =	510 fr.
C et D	8,20 % sur 7500 fr.	= 75	× 8,20 fr. =	615 »
E, F, I	8,20 % sur 5625 fr.	= 56,25	× 8,20 fr. =	461,25
G 1°	8,20 % sur 2500 fr.	= 25	× 8,20 fr. =	205 »
G 2°	13,80 % sur 6875 fr.	= 68,75	× 13,80 fr. =	948,75
			Ensemble	2740,00 fr.

402. Problème VII. — *Primus a eu, d'un premier mariage avec Secunda, deux enfants* A *et* B ; *d'un second mariage avec Tertia, un enfant* C, *Tertia a un autre enfant* D *issu d'un précédent mariage.* 1° A *vient à décéder laissant une fortune de* 100000 *fr. Quelle sera la somme recueillie par Primus,* B, C, D *et Tertia ?* 2° C *vient à décéder laissant une fortune de* 100000 *fr., quelle sera la somme recueillie par Primus,* A, B, D *et Tertia ?*

Note. — La succession d'une personne morte sans postérité, mais laissant ses père, mère, des frères, sœurs ou descendants d'eux, se divise en deux portions égales, dont la moitié est déférée au père et à la mère qui la partagent entre eux également, et l'autre moitié aux frères et sœurs ou descendants d'eux qui la partagent comme nous l'expliquons plus loin. Si la mère ou le frère est prédécédé, la portion qui aurait été dévolue au défunt se réunit à la moitié des frères, sœurs ou leurs descendants ; cette moitié ou ces trois quarts déférés aux frères, sœurs ou descendants d'eux se partagent entre eux de la manière suivante : s'ils sont du même lit, par égales portions ; s'ils sont de lits différents, par moitié entre les deux lignes paternelle et maternelle du défunt. Les germains prennent part dans les deux lignes, et les utérins et consanguins dans leur

Digitized by Google

ligne seulement : s'il n'y a des frères ou sœurs que d'un côté, ils succèdent à la totalité, à l'exclusion de tous autres parents de l'autre ligne. Chaque frère ou sœur prédécédé est représenté par ses enfants qui recueillent tous ensemble, par représentation, autant que leur auteur aurait recueilli lui-même s'il avait survécu.

Solution. — 1° Primus prend le quart de la succession ou 25000 fr ; les 75000 fr. restants se divisent par moitié entre les deux lignes paternelle et maternelle, soit 37500 fr. pour chaque ligne.

B prend sa part dans chacune de ces lignes puisqu'il est frère germain du défunt, tandis que C ne prend que dans la ligne paternelle ; B prend donc 37500 de la ligne maternelle et la moitié ou 18750 fr. dans la ligne paternelle, ensemble 56250 fr. ; C ne prend que 18750 dans la ligne paternelle. D et Tertia ne reçoivent rien.

2° Primus et Tertia, père et mère de C, prennent ensemble la moitié de la succession, soit pour chacun 25000 francs. Les 50000 fr. restants sont dévolus : la moitié à la ligne paternelle, dans laquelle viennent A et B, et l'autre moitié à la ligne maternelle, dans laquelle vient D ; soit pour A, 12500 fr. ; pour B, 12500 fr. et pour D, 25000 fr.

EXERCICES.

1. Primus laisse une fortune de 180,000 fr. et, comme héritiers : 1° A issu de son premier mariage ; B issu de son second mariage ; C et D enfants de E issu du second mariage et prédécédé ; F et H fils de G qui était lui-même fils de E et qui est prédécédé. Que recueillera chacun de ces héritiers de Primus ?

Remarque. — Les enfants ou leurs descendants succèdent à leurs père et mère, aïeuls, aïeules ou autres ascendants sans distinction de sexe ni de primogéniture, et encore qu'ils soient issus de différents mariages. Ils succèdent par égales portions et par tête, quand ils sont tous au premier degré et appelés de leur chef ; ils succèdent par souche lorsqu'ils viennent tous ou en partie par représentation d'un auteur prédécédé. Si une même souche a produit plusieurs branches, la subdivision se fait aussi par souche dans chaque branche et les membres de la même branche partagent entre eux par tête.

Réponse. — A et B prennent chacun 60,000 fr. ; C et D, chacun 20,000 fr. ; F et H, chacun 10,000 fr.

2. Indiquer le montant des droits d'enregistrement et de transcription pour une vente immobilière qui rapporte 10,000 fr., sachant que le notaire fait payer 12 °/₀ pour les frais généraux.

Remarque. — Le droit d'enregistrement dû à raison d'une vente immobilière s'élève à 5,50 °/₀ et le droit de transcription hypothécaire à 1,25 °/₀ sur le prix et les charges. Les frais légaux, pour une vente dont le produit ne dépasse pas 10,000 fr., sont de 7,80 °/₀ et ne sont pas considérés comme charges.

Réponse. — Le montant des droits est de 703,35 fr.

Digitized by Google

3. Une succession s'ouvre et est échue à un enfant pour la moitié et à deux petits enfants du défunt qui se partagent l'autre moitié. Elle comprend : 1° des immeubles en Belgique pour 5,000 fr. ; une créance hypothéquée sur un immeuble à Gand, au capital de 3,000 fr.; 3° une dette hypothécaire grevant les biens ci-dessus au capital de 2,000 fr.; 4° une dette chirographaire de 4,000 fr. Liquidez les droits en indiquant ce qui est dû par chaque héritier.

Remarque. — Le droit de succession en ligne directe est de 1,40 % sur la part de chaque héritier qui recueille, en pleine propriété, au moins 1,000 fr. d'immeubles situés en Belgique ou de rentes ou créances hypothéquées sur de pareils immeubles, après déduction de sa part dans les dettes hypothécaires grevant les biens soumis à l'impôt de succession.

Réponse. — L'enfant paiera 42 fr. et chaque petit enfant 21 fr.

4. Une succession échue pour la moitié en pleine propriété et pour un quart en nue propriété au fils A et pour un quart en pleine propriété et un quart en usufruit au fils B comprend, *activement :* 1° une maison à Gand valant 16,000 fr.; 2° une terre à Terneuzen estimée 4,000 fr.; 3° une maison à Roubaix évaluée 10,000 fr.; *passivement* : 1° une dette de 14,000 fr. grevant la maison à Gand, 2° une de 6,000 fr. hypothéquée sur les biens à Terneuzen et Roubaix. Liquider les droits dus.

Remarque. — Nous avons vu que le droit de succession, en ligne directe, s'élève à 1,40 % pour la propriété ; ce droit est de 0,70 % pour l'usufruit qui est considéré comme valant la moitié de la pleine propriété. La part de chaque héritier qui n'a pas une valeur nette de 1000 fr. en pleine propriété est exemptée de tout droit. L'impôt n'est dû que sur la valeur des immeubles en Belgique et des rentes et créances hypothéquées sur de pareils immeubles et sous déduction des dettes hypothécaires qui grèvent les biens passibles de l'impôt dont il s'agit.

Réponse. — Les droits s'élèvent à 21 fr. Ils sont dus par A.

CHAPITRE V.

Problèmes divers[1].

403. Problème I. — *Deux troupes d'ouvriers ont reçu, l'une* 245 *fr. et l'autre* 192,50 *fr.; chaque ouvrier a le même salaire par jour. On demande de combien d'ouvriers se compose chaque troupe et le salaire de chaque ouvrier, s'il y a* 15 *ouvriers de plus dans une troupe que dans l'autre.*

Solution. — La différence 245 — 192,50 = 52,50 fr. est le salaire de 15 ouvriers ; donc un ouvrier gagne 52,50 fr. : 15 = 3,50 fr. par jour.

Il y a 245 : 3,50 = 70 ouvriers dans la première troupe, et 70 — 15 = 55 ouvriers dans la seconde.

1. Le professeur, après l'étude de chaque problème, fera résoudre des problèmes du même type avec des nombres différents, pour s'assurer que la solution a été bien comprise.

Digitized by Google

404. Problème II. — *Combien faut-il de livres sterling pour* 2400 *thalers? Sachant que* 10 *livres sterling valent* 252,10 *fr.; que* 25,90 *fr. représentent* 5 *dollars; et que* 10 *dollars font* 14 *thalers*[1].

Solution. — Désignons par a, b, c et d les valeurs intrinsèques, pour une même unité, de ces diverses monnaies, dans l'ordre où elles sont énoncées; et soit x le nombre demandé; nous aurons :

$$10 \times a = 252{,}10\, b$$
$$25{,}90 \times b = 5 \times c$$
$$10 \times c = 14 \times d$$
$$2400 \times d = x \times a$$

d'où, en multipliant toutes ces égalités, membre à membre, et omettant les facteurs communs a, b, c et d; il vient

$$10 \times 25{,}90 \times 10 \times 2400 = 252{,}10 \times 5 \times 14 \times x \text{ et, par suite,}$$

$$x = \frac{10 \times 25{,}90 \times 10 \times 2400}{252{,}10 \times 5 \times 14} = 353 \text{ liv. st. } 11 \text{ sch. (la liv. vaut } 20 \text{ sch.).}$$

405. Problème III. — *Quelqu'un a acheté, pour* 172 *fr.,* 23 *m. de deux espèces d'étoffe; l'une à* 8 *fr. et l'autre à* 6 *fr. le mètre. Combien de mètres de chaque espèce a-t-il achetés?*[2]

Solution. — S'il avait acheté 23 m. à 8 fr., il aurait payé 23×8 fr.=184 fr ; mais il n'a payé que 172 fr., ou 184—172=12 fr. de moins ; or, chaque fois qu'il remplace *un* mètre à 8 fr. par un mètre à 6 fr., il y a une diminution de 2 fr. ; donc il a acheté autant de m. à 6 fr. qu'il y a de fois 2 fr. en 12 fr. ; ce qui fait 6 m. à 6 fr. et 23 — 6 = 17 m. à 8 fr.

406. Problème IV. — *La différence de deux nombres est* 71,4 *et le plus petit est contenu* 18 *fois dans le plus grand. Quels sont les deux nombres?*

Solution. — Le plus grand nombre valant 18 fois le plus petit, la différence vaut 17 fois le plus petit ; par conséquent,

---

1. Autrefois on avait une règle spéciale pour déterminer le rapport des monnaies de deux pays, connaissant le rapport de ces monnaies avec celles d'autres pays; c'était la règle *conjointe;* cette règle est hors d'usage et ne figure plus aux programmes officiels.

2. La méthode employée était connue d'abord sous le nom de *fausse position* et ensuite, par abréviation *des hypothèses;* elle a pour base une hypothèse fausse, mais qui conduit à la solution par l'étude de l'écart que cette hypothèse a produit. Elle suppose que les variations des erreurs sont proportionnelles aux variations des valeurs attribuées au nombre inconnu. Voir le Dictionnaire de Montferrier à l'article Fausse position (Règle de).

Digitized by Google

le plus petit est 71,4 : 17 = 4,2 ; le plus grand est 4,2 + 71,4 = 75,6 ou bien 18 × 4,2 = 75,6, nombre égal.

407. Problème V. — *Deux nombres valent ensemble* $3\frac{3}{4}$; *le plus petit vaut deux fois leur différence. Calculez les deux nombres.*

Solution. — Le plus grand nombre se compose du plus petit et de la différence, donc de 3 fois la différence ; les deux nombres valent ensemble 5 fois la différence ou $3\frac{3}{4}$; la différence $= 3\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4}$.

Le plus petit nombre $= 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Le plus grand » $= 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ ou $3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$.

408. Problème VI — *Quel est le plus petit de deux nombres, sachant que le plus grand est* 8 *et que la somme des deux nombres augmentée de leur produit fait* 53 ?

Solution. — La somme se compose du plus petit nombre et de 8 ; le produit vaut 8 fois le plus petit ; donc en additionnant la somme avec le produit, on a 9 fois le plus petit nombre + 8 ; cette somme est égale à 53. donc 9 fois le plus petit font 53 — 8 = 45, et le plus petit est 45 : 9 = 5.

409. Problème VII. — *La différence de deux nombres est* 6 ; 8 *fois le plus grand et* 4 *fois le plus petit font ensemble* 60. *Quels sont les deux nombres ?*

Solution. — 8 fois le plus grand font 8 fois le plus petit + 8 fois 6 ou 48 ; donc 8 fois le plus grand plus 4 fois le plus petit font ensemble 12 fois le plus petit plus 48, et en ne prenant que 12 fois le plus petit on a 60 — 48 = 12 ; de sorte que le plus petit est 1 et le plus grand est 1 + 6 = 7.

410. Problème VIII. — *Partager* 60 *en deux nombres tels que la septième partie du premier soit égal à la huitième partie du second.*

Solution. — La septième partie du premier valant la huitième partie du second, les sept septièmes ou le premier en entier font les sept huitièmes du second ; de sorte que les deux nombres ensemble font les $\frac{15}{8}$ du second.

Ces $\frac{15}{8}$ du second valent 60, $\frac{1}{8}$ vaut 4 et les $\frac{8}{8}$ valent 32 ; c'est le second nombre demandé ; le premier est 60 — 32 = 28.

Autre solution. — Dans ce problème, il y a deux conditions : 1° le septième du premier nombre doit être égal au huitième du second ; 2° les deux nombres doivent donner 60 pour somme totale.

Digitized by Google

Pour satisfaire à la 1re condition, il suffit de prendre 7 pour le premier nombre et 8 pour le second ; mais alors la somme des deux nombres n'est que 15, tandis qu'elle doit être 60 pour satisfaire à la deuxième condition ; on rectifie l'erreur en prenant chacun des nombres supposés autant de fois qu'il y a de fois 15 en 60, c'est-à-dire 4 fois, car alors la somme est aussi multipliée par 4 ; on trouve ainsi que les nombres demandés sont $4 \times 7 = 28$ et $4 \times 8 = 32$.

411. Problème IX. — *Deux personnes se partagent une somme de* 204 *fr. de manière que le cinquième de la part du premier surpasse de* 7 *fr. le huitième de la part du second. Quelle est la part de chaque personne ?*

Solution. — $\frac{1}{5}$ de la part de la 1re vaut $\frac{1}{8}$ de la part de la 2de, plus 7 fr. ; les $\frac{5}{5}$ de la part de la 1re valent $\frac{5}{8}$ de la part de la 2de, plus 35 fr. ; ensemble les deux parts font $\frac{5}{8} + \frac{8}{8}$ ou $\frac{13}{8}$ de la part de la 2de, plus 35 fr. et cette somme s'élève à 204 fr.

Donc les $\frac{13}{8}$ de la part de la 2de valent 204 — 35 ou 169 fr. ;
le $\frac{1}{8}$ » » vaut 169 : 13 ou 13 fr. ;
les $\frac{8}{8}$ valent 8×13 fr. ou 104 fr.

La 2de a pris 104 fr. et la 1re 204 — 104 = 100 fr.

412. Problème X. — *Deux personnes ont un égal revenu, la première épargne chaque année le* 7e *de son revenu, mais l'autre qui dépense* 2000 *fr. de plus par an que la première a fait* 5000 *fr. de dettes au bout de* 10 *ans. Quel est le revenu de ces deux personnes ?*

Solution. — La 2e personne a dépassé son revenu annuel de $\frac{5000}{10} = 500$ fr. Si elle n'avait dépensé donc que 2000 — 500 = 1500 fr. de plus que la 1re personne, elle n'aurait dépensé que son revenu, donc un $\frac{1}{7}$ de son revenu de plus que la 1re qui épargne autant.

Puisque le 7e du revenu fait 1500 fr. ; le revenu entier s'élève à 7×1500 fr. = 10500 fr.

413. Problème XI. — *Une dame a l'intention de partager une certaine somme par parties égales, entre un certain nombre de pauvres ; elle songe d'abord à donner* 50 *cmes à chaque pauvre, mais pour réaliser ce dessein il lui manque* 60 *cmes ; alors elle se résoud à ne donner que* 40 *cmes à chaque pauvre, de cette manière il lui restera* 90 *cmes.*

Digitized by Google

Combien y a-t-il de pauvres et quelle est la somme totale que la dame veut distribuer ?

Solution. — La différence entre 50 c^mes^ et 40 c^mes^ est 10 c^mes^ ; et cette différence de 10 c^mes^ par pauvre produit une différence totale de 60 + 90 = 150 c^mes^ pour la somme à distribuer ; il y a donc autant de pauvres qu'il y a de fois 10 c^mes^ en 150 c^mes^ ; il y a 15 pauvres.

15 pauvres à 50 c^mes^ réclament 15 × 50 c^mes^ = 750 c^mes^ ; mais il manque 60 c^mes^, donc la somme à partager est de 750 — 60 = 690 c^mes^ = 6,90 fr.

414. Problème XII. — *Deux personnes ont touché le même revenu, mais l'une n'ayant dépensé que* 3000 *fr. et l'autre* 8000 *fr. il se fait qu'il reste à la première personne une somme triple de celle qui reste à la seconde. Quel est le revenu de chaque personne ?*

Solution. — Il reste à la 1re le revenu moins 3000 et à la 2de le revenu moins 8000 ; le triple de ce reste ou 3 fois le revenu moins 24000 fr. font autant que ce qu'il restait à la 1re personne ou une fois le revenu moins 3000 ; donc 2 fois ce revenu font 24000 — 3000 = 21000 fr. ; le revenu s'élève à 10500 fr.

En effet, à la 1re il reste 7500 et à la 2de 2500, et 7500 est le triple de 2500.

415. Problème XIII. — *D'après certaines statistiques, le nombre des hommes qui peuplent la terre, peut approximativement être distribué, comme suit, entre les cinq parties du monde ; l'Asie les* $\frac{8}{15}$, *l'Afrique le* $\frac{2}{15}$; *l'Amérique le* $\frac{1}{13}$; *l'Océanie le* $\frac{1}{39}$ *et l'Europe est habitée par* 347 *millions d'individus environ*[1]. *On demande une valeur approximative de la population de toute la terre.*

Solution. — Les quatre premières parties du monde comptent les $\frac{8}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{13} + \frac{1}{39} = \frac{10}{13}$ de toute la population ; il reste donc les $\frac{3}{13}$ pour l'Europe.

Si les $\frac{3}{13}$ de la population totale font 347 millions,
$\frac{1}{13}$ » fait $\frac{347}{3}$ »
et les $\frac{13}{13}$ » font $\frac{347 \times 13}{3}$ = 1503 millions environ d'habitants.

1. Ces chiffres sont un peu supérieurs à ceux fournis, en 1888, par M. Levasseur à l'Académie des sciences de Paris.

Digitized by Google

416. Problème XIV. — *Un voyageur part* 4 *jours après un autre et il doit le rejoindre à la fin du septième jour. Combien de lieues devra-t-il faire par jour, sachant que le voyageur qu'il poursuit fait huit lieues par jour?*

Solution. — Le voyageur qui est poursuivi a voyagé pendant $4 + 7 = 11$ jours, quand il est atteint; il a donc fait 11×8 lieues $= 88$ lieues; cette distance doit être parcourue en 7 jours par l'autre voyageur; celui-ci fera donc $\frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}$ lieues par jour.

417. Problème XV. — *Deux personnes partant à pied, l'une de Gand, l'autre d'Anvers, vont à la rencontre l'une de l'autre; au bout de combien d'heures se rencontreront-elles, si l'une fait* 5 *kilomètres à l'heure et l'autre* 4 *kilom. seulement pendant le même temps? La distance des deux villes est de* 54 *kilomètres.*

Solution. — Elles font ensemble $5 + 4 = 9$ kilom. à l'heure; or, quand elles se rencontreront, elles auront parcouru ensemble toute la distance qui est de 54 kilom.; donc il faudra autant d'heures qu'il y a de fois 9 kilom. en 54 kilom.; cela fait 6 heures.

418. Problème XVI. — *Un chien poursuit un lièvre qui a* 85 *sauts d'avance; le lièvre fait* 5 *sauts pendant que le chien en fait* 8; *et* 3 *sauts du chien valent autant que* 4 *sauts du lièvre. Combien de sauts le chien devra-t-il faire pour atteindre le lièvre?*

Solution. — Pendant que le chien fait un saut, le livre n'en fait que $\frac{5}{8}$; et celui-ci perd ainsi $\frac{3}{8}$ d'un saut de lièvre.

Un saut du chien vaut autant que $\frac{4}{5}$ de saut de lièvre; donc le chien regagne encore $\frac{1}{3}$ de saut de lièvre.

En tout, chaque fois que le chien fait un saut, il regagne $\frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$ d'un saut du lièvre; donc, pour rattraper les 85 sauts du lièvre, le chien fera $85 : \frac{17}{24} = 85 \times \frac{24}{17} = 120$ sauts.

419. Problème XVII. — *Quelqu'un a* 44 *ans et son fils en a* 18. *Dans combien d'années l'âge du fils ne sera-t-il que les* $\frac{5}{7}$ *de l'âge du père?*

Solution. — La différence des deux âges sera toujours de $44 - 18 = 26$ ans; mais à l'époque demandée, cette différence doit être les $\frac{2}{7}$ de l'âge du père; donc le père aura $26 : \frac{2}{7} = 91$ ans; ce qui arrivera dans $91 - 44 = 47$ ans [1].

1. La solution de ce problème montre combien il importe de tenir compte des conditions implicites d'une question.

Digitized by Google

420. Problème XVIII. — *L'âge d'une personne est actuellement les sept cinquièmes de l'âge d'une autre ; il y a 24 ans, l'âge de la 1re était le double de l'âge de la 2de. Quel était alors l'âge de chaque personne ?*

Solution — L'âge de l'aîné vaut actuellement les sept cinquièmes de l'âge du cadet ; de là résulte que le 7e de l'âge de l'aîné vaut le 5e de l'âge du cadet ; or, l'âge actuel du cadet dépasse de 24 ans l'âge qu'il avait il y a 24 ans ; de même l'âge actuel de l'aîné dépasse de 24 ans l'âge qu'il avait il y a 24 ans, ou ce qui revient au même le double de l'âge du cadet à cette époque ; de sorte qu'on peut écrire l'égalité des deux fractions suivantes :

$$\frac{\text{le double de l'âge du cadet} + 24}{7} = \frac{\text{l'âge du cadet} + 24}{5} ;$$

on sait que lorsque deux fractions sont équivalentes, on obtient une fraction encore équivalente aux deux premières en soustrayant celles-ci membre à membre (213) ; par conséquent

$$\frac{\text{l'âge du cadet} + 24}{5} = \frac{\text{âge du cadet}}{2}$$

ou bien, en réduisant les fractions au même dénominateur deux fois l'âge du cadet + 48 = 5 fois l'âge du cadet ; il résulte de là que 48 = 3 fois l'âge du cadet.

Il y a 24 ans le cadet avait 16 ans et l'aîné 32 ans ; actuellement le cadet a 16 + 24 = 40 ans et l'aîné 32 + 24 = 56 ; et l'on vérifie facilement que $56 = \frac{7}{5} \times 40$ (Voir note XXXI).

421. Problème XIX. — *Les deux aiguilles d'une montre coïncident à midi. Quand aura lieu la première coïncidence qui suit ?*

1re *solution.* — Le cadran est divisé en 60 parties égales ; la grande aiguille parcourt une de ces divisions par minute, et la petite aiguille qui marche 12 fois plus lentement ne fait que $\frac{1}{12}$ de division pendant le même temps ; donc la 1re aiguille prend sur la 2e une avance de $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ de division par minute.

Or la grande aiguille, pour atteindre la petite aiguille, doit faire d'abord tout le tour du cadran ; donc c'est comme si la petite aiguille avait une avance de 60 divisions ; pour rattraper cette avance il faudra autant de minutes qu'il y a de fois $\frac{11}{12}$

Digitized by Google

de division en 60 divisions ; ce qui fait $60 \times \frac{12}{11} = 65' \frac{5}{11} =$ 1 heure $5' \frac{5}{11}$ [1].

2me *solution.* — En 12 heures il y a 11 coïncidences ; et l'intervalle de temps entre deux coïncidences consécutives est évidemment toujours le même ; donc le temps qui s'écoule entre deux de ces coïncidences consécutives est $\frac{12}{11} = 1^h 5' \frac{5}{11}$.

422. Problème XX. — *Une horloge avance de* 4 *minutes en* 12 *heures, et une autre retarde de* 4 *minutes en* 24 *heures ; on les règle le lundi à midi ; déterminer l'heure indiquée par chaque horloge, lorsque l'une avancera de* 16′ 30″ *sur l'autre, et le jour où cela aura lieu.*

Solution. — La 1re horloge avance de 8′ en 24 h., et la 2de retarde de 4′ ; par suite, elles auront 12′ de différence en 24^h ; pour avoir 16′ 30″ ou 16′,5 il faudra $\frac{16{,}5 \times 24^h}{12}$ ou 33 heures ou $24^h + 9^h$.

Il sera donc 9 heures du soir (heure vraie). La 1re horloge indiquera $9 + \frac{33 \times 8'}{24}$ ou $9^h 11'$ du soir ; la 2e horloge indiquera $9^h - \frac{33 \times 4'}{24}$ ou $8^h 54' 30''$; ce qui arrivera le mardi soir.

423. Problème XXI. — *Un domestique s'est engagé pour un an, aux conditions suivantes :* 360 *fr. de gages, une livrée, le logement et la nourriture. Après* 5 *mois le domestique se retire avec l'autorisation de son maître qui lui laisse la livrée et lui donne encore* 10 *fr. pour solde de compte. — Quelle est la valeur de la livrée ?*

Solution. — Les 7 mois qui restent pour achever l'année rapporteraient encore 360 — 10 = 350 fr. au domestique ; donc on peut dire que le domestique gagne $\frac{350}{7} = 50$ fr. par mois pour ses gages et sa livrée et 12×50 fr. = 600 fr. par an ; donc la livrée vaut 600 — 360 = 240 fr.

---

1. On pourrait aussi résoudre de la même manière la question si l'on imposait la condition que la grande aiguille soit de 15, 30, 23 ... ou un nombre quelconque de divisions en avance ou de 15, 30, 23 ... de divisions en retard, ou bien encore que la grande aiguille fasse un angle droit avec la petite ou soit sur le prolongement de la plus petite, etc., etc.

Digitized by Google

424. Problème XXII. — *Un détaillant achète d'abord 8 kilogr. d'une certaine espèce de marchandises et 19 kil. d'une autre espèce, et sa facture s'élève à 16,45 fr. ; ensuite il fait un second achat de 20 kil. de la 1re espèce et 16 kil. de la 2de et sa facture est de 23,80 fr. — Quel est le prix d'un kilogr. de chacune des deux espèces de marchandises ?*

Solution. — On trouverait facilement la réponse si les deux achats comprenaient un même nombre de kil. d'une espèce. Cela posé, si l'on remarque que le moindre multiple de 8 et 20 est 40 et que $\frac{40}{8} = 5$ et $\frac{40}{20} = 2$, on voit que si l'on prend 5 fois le premier achat et 2 fois le 2d, on obtiendra, pour les deux achats, le même nombre de kil. de la 1re espèce.

En effet { 40 kil. de la 1re espèce + 95 kil. de la 2e coûtent 82,25 fr.
alors { 40 » » + 32 » » 47,60 »

La différence qui est le prix de 63 kil. de la 2e espèce s'élève à 34,65 fr.;
donc 1 kil. de la 2e espèce vaut 34,65 : 63 = 0,55 fr.

Alors, les 19 kil. de la 2e espèce lors du 1er achat ont coûté 19 × 0,55 fr. = 10,45 fr ; donc les 8 kil. de la 1re espèce ont coûté 16,45 fr. — 10,45 fr. = 6 fr. et un kil. de la 1re espèce coûte 6 fr. : 8 = 0,75 fr. [1]

425. Problème. XXIII. — *Trois personnes se mettent au jeu et elles conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres ; après trois parties successives il reste 40 fr. à chaque joueur. Combien chaque personne avait-elle en se mettant au jeu, sachant que chacune d'elles a perdu une partie à son tour ?*

Solution [2]. — Écrivons sur une ligne la somme que chaque joueur a :

	1er perdant.	2e perdant.	3e perdant.
après la 3e partie. . . .	40	40	40
avant » . . .	20	20	80
» la 2e partie. . . .	10	70	40
» la 1re » . . .	65	35	20

Réponse. — En se mettant au jeu, la personne qui a perdu la 1re partie avait 65 fr., celle qui a perdu la 2e partie avait 35 fr., et celle qui a perdu la 3e partie avait 20 fr.

1. Cette méthode peut être appelée de *réduction à un même terme de comparaison.*
2. La méthode appliquée à cette solution est dite la *méthode rétrograde.*

Digitized by Google

426. Problème XXIV. — *Un marchand prend, chaque année, sur le capital qu'il emploie pour son commerce, 4000 fr. nécessaires pour les besoins de son ménage; à cause de ses bénéfices, son capital augmente, à la fin de chaque année, du tiers de ce qui lui reste. A la fin de la 3e année, il a le double de ce qu'il avait en commençant son commerce. — Quelle a été sa mise de fonds?*

Solution. — Le marchand prend 4000 fr. de son capital, il lui reste donc la mise de fonds — 4000 fr ; mais à cause des bénéfices, il a à la fin de l'année un tiers de plus, soit les $\frac{4}{3}$ de la mise de fonds — $\frac{4}{3} \times 4000$ fr.

Il prend sur cette somme 4000 fr. ou $\frac{12000}{3}$ fr. il ne lui reste donc que les $\frac{4}{3}$ de la mise de fonds — $\frac{28000}{3}$ fr.; mais comme, avec ses bénéfices de l'année, il a un tiers de plus, il possèdera les $\frac{4}{3}$ des $\frac{4}{3}$ ou $\frac{16}{9}$ de la mise de fonds — $\frac{4}{3} \times \frac{28000}{3}$ fr.

Enfin il prend 4000 fr. ou $\frac{36000}{9}$ fr., il reste les $\frac{16}{9}$ de la mise de fonds — $\frac{148000}{9}$ fr. et avec le bénéfice de la 3e année un tiers de plus, donc les $\frac{4}{3}$ des $\frac{16}{9}$ de la mise de fonds — $\frac{4}{3} \times \frac{148000}{9}$ fr.

Ce reste est égal au double de la mise de fonds $= \frac{54}{27}$ de la mise de fonds ; par conséquent les $\frac{64}{27} - \frac{54}{27} = \frac{10}{27}$ de la mise de fonds font $\frac{4}{3} \times \frac{148000}{9} = \frac{592000}{27}$ fr. On trouve ainsi que le capital demandé $= \frac{592000}{27} : \frac{10}{27} = 59200$ fr.

427. Problème XXV. — *Quelqu'un qui a des jetons dans les deux mains dit : si je fais passer un jeton de la main gauche dans la main droite, il y en a, dans celle-ci, deux fois plus qu'il en reste dans celle-là ; mais, au contraire, si j'avais fait passer un jeton de la droite dans la gauche, il y aurait eu le même nombre de jetons dans les deux mains. — Combien y a-t-il de jetons dans chaque main?*

Solution. — D'après la 2de condition il y a évidemment deux jetons de plus dans la main droite que dans la gauche.

Quand on fait passer un jeton de la gauche dans la droite, la différence augmente de deux jetons et l'on voit ainsi qu'il y a alors 4 jetons de plus dans la droite que dans la gauche ; or, d'après la 1re condition, il y a alors deux fois plus de jetons dans la droite que dans la gauche et la différence est précisément égale an nombre des jetons qui se trouvent encore dans la gauche.

Il reste donc 4 jetons dans la gauche et il y en a 8 dans la droite ; et en faisant repasser un jeton de la main droite dans la gauche on trouve enfin qu'il y avait d'abord 7 jetons dans la droite 5 dans la gauche.

Digitized by Google

428. Problème XXVI. — *Dans une réunion de personnes, il y avait d'abord trois fois plus d'hommes que de femmes ; après le départ de 8 couples, le nombre des hommes est 5 fois plus grand que celui des femmes. — Combien d'hommes et de femmes y avait-il d'abord ?*

Solution. — La différence entre le nombre des hommes et celui des femmes était d'abord de 2 fois le dernier de ces nombres.

Après le départ de 8 couples, c'est-à-dire de 8 hommes et de 8 femmes, la différence devient 4 fois le nombre des femmes qui restent.

Mais, d'après une propriété fondamentale de la soustraction, la différence reste la même quand le nombre des hommes et celui des femmes diminuent tous les deux de 8.

Par conséquent deux fois le nombre primitif des femmes font quatre fois le nombre des femmes diminué de 8, ou bien en prenant la moitié le nombre primitif vaut 2 fois ce nombre diminué de 8 ; ce nombre des femmes est donc 8 ; et il y avait d'abord $8 + 8 = 16$ femmes et $3 \times 16 = 48$ hommes.

429. Problème XXVII. — *Un certain article de consommation est soumis à un droit de 6 fr. par hectolitre ; en conséquence d'une réduction de droit, la consommation augmente de moitié, et le revenu diminue d'un tiers. — On demande la valeur du droit après la réduction.*

Solution. — Supposons que la consommation soit d'un hectolitre. Un hectolitre donnait 6 fr. de revenu ; la consommation augmente de la moitié donc elle s'élève à $1\frac{1}{2}$ hectolitre ; mais le revenu diminue de son tiers, donc il n'est que de $\frac{2}{3} \times 6$ fr. $= 4$ fr.

$1\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ hectolitre rapportent 4 fr. et un hect. 4 fr. à $\frac{3}{2} = \frac{8}{3}$ fr. $= 2\frac{2}{3}$ fr.

430. Problème XXVIII. — *Cinq brigands arrêtent un certain nombre de voyageurs et ils exigent de ceux-ci, pour chacun d'eux, une contribution de 4 fr. par voyageur. Les brigands font le partage de leur butin, mais le chef des brigands réclame ensuite 4 fr. de chacun de ses compagnons, en sa qualité de commandant ; de cette manière sa part est double de celle de chacun de ses subordonnés. Combien y avait-il de voyageurs ?*

Solution. Il reste à chaque brigand autant de fois 4 fr. qu'il y a de voyageurs moins un ; le chef a autant de fois 4 fr. qu'il y a de voyageurs $+$ 16 fr., ou bien autant de fois 4 fr. qu'il y a de voyageurs moins un $+$ 20 fr.

Digitized by Google

Or le chef a le double d'un des autres brigands, donc 8 fr. pris autant de fois qu'il y a de voyageurs moins un.

Il résulte de ce raisonnement que 8 fois le nombre des voyageurs diminué de un valent 4 fois ce nombre + 20, de sorte que 4 fois ce nombre valent 20 ; il y avait donc 5 + 1 = 6 voyageurs.

431. Problème XXIX. *Un marchand a acheté deux pièces de drap de qualités différentes et chaque pièce lui coûte 840 fr. Un mètre de la 1re qualité coûte les $\frac{2}{7}$ de plus qu'un mètre de la 2de, mais la pièce de la meilleure qualité a 6 $\frac{2}{5}$ mètres de moins. — Combien y a-t-il de mètres dans chaque pièce ?*

Solution. — La qualité inférieure coûte en tout 840 fr.; donc s'il y avait eu le même nombre de mètres de la qualité supérieure, on aurait payé pour celle-ci

$\frac{9}{7} \times 840$ fr. = 1080 fr.

mais le marchand ne paie que 840 fr.

Il y a une différence de 240 fr. qui provient de ce qu'il y a 6 $\frac{2}{5}$ mètres de moins.

Donc 6 $\frac{2}{5}$ m. de la qualité supérieure coûtent 240 fr.,

1 » » » coûte 240 fr. : 6 $\frac{2}{5}$ = 37,50 fr.

C'est le prix de $\frac{9}{7}$ m. de la qualité inférieure ; donc un mètre de cette qualité coûte 37,50 : $\frac{9}{7}$ = 29 $\frac{1}{6}$ fr. = 29,17 fr.

La pièce de qualité inférieure a 840 : 29 $\frac{1}{6}$ = 28,80 mètres de long ; l'autre pièce a 840 : 37,50 = 22,40 m de long.

432. Problème XXX. — *Un cultivateur achète une pièce de terre à raison de 6000 fr. l'hectare ; la pièce contient 6 ares de moins que ne le porte l'acte de vente, mais il ne fait aucune réclamation car il peut revendre la même pièce de terre à 7500 fr. l'hectare, en gagnant ainsi 16 $\frac{2}{3}$ % sur le montant total de son achat. — On demande la contenance exacte de cette pièce de terre.*

Solution. — Un are coûte au cultivateur $\frac{6000}{100}$ = 60 fr.;

il a gagné 16 $\frac{2}{3}$ %, donc 16 $\frac{2}{3} \times$ 0,60 fr. = 10 »

L'are devrait donc rapporter 70 fr.

Mais il revend l'are à $\frac{7500}{100}$ = 75 fr., de sorte qu'il y a une différence de 5 fr. par are ; cette différence provient de ce qu'il y a 6 ares de moins à 70 fr., ce qui fait une perte de 420 fr.

Le cultivateur a donc vendu autant d'ares qu'il y a de fois 5 fr. en 420 fr. ; ce qui fait 84 ares ; il en avait payé 90.

Réponse. — La pièce de terre a une contenance réelle de 84 ares.

Digitized by Google

433. Problème XXXI. — *Quel même nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$, pour que la nouvelle fraction soit égale à $\frac{7}{8}$?*

Solution. — Puisqu'on ajoute un même nombre aux deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$, la différence des deux termes de la nouvelle fraction non simplifiée sera encore 7 — 5 ou 2; mais après avoir simplifié la fraction, c'est-à-dire après avoir divisé ses deux termes par un même nombre, la différence des deux termes est 8 — 7 = 1 ; or quand on divise les deux termes d'une différence par un même nombre, le reste est aussi divisé par ce nombre ; donc la différence des deux termes de la fraction non simplifiée étant 2 et celle des deux termes de la fraction simplifiée étant 1 on voit ainsi que la simplification s'est faite en divisant les deux termes par 2 ; de sorte que la fraction non simplifiée est $\frac{14}{16}$ et l'on a ajouté 9 aux deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$.

434. Problème XXXII. — *On a une fraction dont le numérateur et le dénominateur font ensemble* 72 ; *si l'on réduit cette fraction à sa plus simple expression, la somme du numérateur avec le dénominateur sera* 4, *et la différence entre les deux dénominateurs sera* 51. — *Quelle est cette fraction?*

Solution. — Pour réduire une fraction à sa plus simple expression on divise les deux termes par leur p. g. c. d. ; et alors la somme des deux termes est aussi divisée par ce p. g. c. d.; on trouve ainsi que le p. g. c. d. est $\frac{72}{4}$ = 18.

La différence des deux dénominateurs qui est 51 vaut 17 fois le plus petit, donc celui-ci est $\frac{51}{17}$ = 3 ; le numérateur de la fraction réduite est donc 4 — 3 = 1 et la fraction même est $\frac{1}{3}$, de sorte que la première fraction est $\frac{18}{54}$.

435. Problème XXXIII. — *Un marchand achète une pièce de drap qu'il paie à raison de* 10 *fr. le mètre ; en la mesurant, il trouve que la pièce a* 5 *mètres de plus qu'il le croyait; mais le drap est de si mauvaise qualité qu'il se voit forcé de le revendre à* 8 *fr. le mètre. Toute la pièce étant vendue à ce prix, le marchand n'a qu'une perte de* $13\frac{1}{3}$ *%. de la somme qu'il a payée. — Quelle était la longueur totale de la pièce de drap?*

Solution. — S'il perd $13\frac{1}{3}$ % donc $1\frac{1}{3}$ pour 10 fr., il devrait revendre le mètre à $10 - 1\frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$ fr., s'il n'y avait pas d'erreur dans le mesurage.

Digitized by Google

Mais il ne vend le mètre qu'à 8 fr., ce qui fait une différence de $\frac{2}{3}$ fr. compensée par les 5 mètres à 8 fr. qui sont en trop ; il a donc payé, lui-même, autant de mètres qu'il y a de fois $\frac{2}{3}$ fr. en 40 fr.; ce qui fait $40 : \frac{2}{3} = 60$ mètres.

436. Problème XXXIV. — *Trois bœufs ont mangé, en deux semaines, l'herbe de deux ares de terrain, plus l'herbe qui a poussé durant ce temps. Deux bœufs ont mangé, en 4 semaines, l'herbe de deux ares, plus l'herbe qui a poussé. — Combien faudra-t-il de bœufs pour manger en six semaines l'herbe d'un pré de six ares plus l'herbe qui poussera pendant ce temps?* [1]

Solution. — Représentons par h l'herbe qui pousse sur une prairie d'un are pendant une semaine et soit x le nombre de bœufs demandé ; on a :

1° 3 bœufs en 2 semaines ont mangé l'herbe de 2 ares $+ 4h$. ;
2° 2 » 4 » » » 2 » $+ 8h$. ;
3° x » 6 » » » 6 » $+ 36h$. ;

ou bien en doublant le nombre des semaines du 1° pour qu'il devienne égal à celui du 2°.

4° 3 bœufs en 4 semaines ont mangé l'herbe de 4 ares $+ 8h$. ;
donc 5° 1 bœuf en 4 semaines mange l'herbe de 2 ares
et 6° 2 bœufs en 4 » mangent l'herbe de 4 ares
et d'après le 2° $8h = 2$ ares, d'où $4h = 1$ are.

On a donc les conditions suivantes :

7° 3 bœufs en 2 semaines ont mangé l'herbe de 3 ares ;
8° 2 » 4 » » » 4 ares ;
9° x » 6 » » » 15 ares ;
donc 10° 1 » 4 » » » 2 ares ;
11° 1 » 6 » » » 3 ares ;

Enfin, pour manger l'herbe de 15 ares en 6 semaines, il faut autant de bœufs qu'il y a de fois 3 ares en 15 ares ; ce qui fait 5 bœufs.

437. Problème XXXV. — *La liquidation d'une faillite s'opère le 3 juin 1888. L'actif comprend un capital de 8640 fr. et une rente sur l'État de 360 fr. en 3 % au cours de 79,70. Les créanciers sont : Pierre, à qui il est dû 12650 fr., ainsi que l'intérêt simple à 5 % depuis le 25 octobre 1887 ; Louis, à qui le failli avait souscrit un billet de 8600 fr. payable sans*

1. Énoncé attribué à Newton.

Digitized by Google

intérêt au 1er *novembre* 1888. *Selon les usages du commerce, ce billet doit subir l'escompte de* 6 % *par an. Partager l'actif entre les deux créanciers.*

Solution. — L'actif de la faillite sera de 8640 fr. plus la valeur de la rente qui est $\frac{360 \times 79,7}{3}$ ou 9654, dont il faut déduire le courtage, (un pour mille) car dans les faillites on réalise ordinairement toutes les valeurs. 9564 — 9,56 = 9554,44. L'actif est donc de 8640 + 9554,44 = 18194,44.

Si l'on compte le mois de 30 jours, comme c'est l'usage, à Pierre il est dû 12650 + $\frac{218 \times 12650}{7200}$ ou 13033,01 fr. ;
à Louis il sera dû 8600 — $\frac{147 \times 8600}{6000}$ ou 8389,30.

Les créanciers se partageront donc 18194,44 fr. en parties proportionnelles à 13033,01 et 8389,30 dont la somme est 21422,31.

Pierre aura $\frac{13033,01 \times 18194,44}{21422,31}$ = 11069,22 fr.

Louis aura $\frac{8389,30 \times 18194,44}{21422,31}$ = 7125,22 fr.

438. Problème XXXVI. — *Un père partage son héritage entre ses enfants de la manière suivante : le premier aura* 10000 *fr. plus le* 5e *du reste, le* 2e 20000 *fr. plus le* 5e *du nouveau reste, le* 3e 30000 *fr. plus le* 5e *du reste, et ainsi de suite. Il arrive que l'héritage est entièrement partagé quand le dernier enfant a reçu sa part; de plus les enfants ont reçu des parts égales. On demande la valeur de l'héritage, le nombre des enfants et la part de chaque enfant.*

Solution. — (Méthode des hypothèses, voir le renvoi du problème III). Supposons que la somme à partager soit de 100000 fr. La part du premier serait de 10000 fr. plus du 5e du reste ou 18000 fr., donc en tout de 28000 fr.; il reste alors 72000 et la part du 2e serait de 30400 (même calcul que pour le 1er). Les deux parts au lieu d'être égales différeraient de 2400 fr.

Supposons que la somme à partager soit de 110000 fr. ; en raisonnant comme dans l'hypothèse précédente, on trouverait que la différence des deux parts ne serait plus que de 2000 fr.

Si la somme à partager était de 120000 fr. la différence serait réduite à 1600 fr. Par conséquent chaque fois qu'on augmente l'héritage de 10000 fr. la différence des deux premières parts diminue de 400 fr.; or, quand l'héritage est de 100000 fr. la différence est de 2400 fr. et pour que cette différence soit nulle, il faut que l'héritage soit augmenté d'autant de fois 10000 fr. qu'il y a de fois 400 fr. en 2400, donc de 60000 fr.

L'héritage est de 160000 fr. Chaque enfant recevra 40000 fr. et il y a quatre enfants.

Digitized by Google

439. Problème XXXVII. — *Un moribond qui a ses deux fils à l'armée, et qui a appris que l'un des deux a été tué sur le champ de bataille, dit à sa femme : Si l'aîné revient je vous prie de lui donner les $\frac{3}{10}$ de notre fortune et de conserver le reste pour vous; mais si c'est le plus jeune qui a survécu donnez-lui les $\frac{2}{5}$ de notre fortune. Après la mort du père, les fils reviennent tous les deux. — Comment la mère partagera-t-elle la fortune pour rester fidèle au désir de son mari ?*

Solution. — Quand l'aîné reçoit les $\frac{3}{10}$ la mère conserve les $\frac{7}{10}$;
» le cadet » $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{10}$ » » $\frac{6}{10}$;

Donc pour les $\frac{6}{10}$ de la mère, il y a les $\frac{4}{10}$ pour le cadet ;
et pour les $\frac{7}{10}$ de la mère, il y aurait les $\frac{4 \times 7}{10 \times 6} = \frac{7}{15}$ pour le cadet.

Il résulte de là que si l'aîné reçoit les $\frac{3}{10}$, la mère doit avoir les $\frac{7}{10}$ et par conséquent le cadet les $\frac{7}{15}$; ou bien $\frac{9}{30}$ pour l'aîné, $\frac{21}{30}$ pour la mère et $\frac{14}{30}$ pour le cadet. Le problème est ramené à partager la fortune proportionnellement aux nombres 9, 21 et 14.

L'aîné recevra les $\frac{9}{44}$, la mère les $\frac{21}{44}$ et le cadet les $\frac{14}{44}$ de la fortune.

440. Problème XXXVIII. — *Un Turc meurt ; il laisse* 17 *chameaux dans ses écuries et par testament, les lègue dans la proportion suivante, à ses trois fils : l'aîné recevra la moitié du legs ; le second, un tiers et le cadet un neuvième. — Que fera l'exécuteur testamentaire pour satisfaire à ces stipulations ?* (Cette question est connue sous le nom de *problème des* 17 *chameaux.*)

Solution. — L'histoire raconte que l'exécuteur testamentaire courut conter son cas au cadi ; celui-ci convoque les trois fils et fait amener dans sa cour les 17 chameaux ; puis il envoie emprunter à son voisin un autre chameau. Il y a donc dans la cour 18 chameaux. Le cadi commence le partage : la moitié des 18 chameaux, soit 9 chameaux à l'aîné ; le tiers soit 6 chameaux au second ; le neuvième, soit 2 chameaux au cadet; total $9 + 6 + 2 = 17$ chameaux. Le 18e chameau ayant servi à résoudre la difficulté est renvoyé avec remerçîments à son propriétaire. Les fils ne peuvent rien réclamer, puis qu'ils ont tous eu plus que leur compte.

Ce problème peut être résolu comme le précédent : le 1er doit avoir $\frac{1}{2}$, le 2e $\frac{1}{3}$ et le 3e $\frac{1}{9}$ ou $\frac{9}{18}$, $\frac{6}{18}$ et $\frac{2}{18}$; donc il faut partager les 17 chameaux proportionnellement aux nombres 9, 6 et 2 ; et comme la somme de ces nombres est précisément 17, le 1er aura 9 chameaux, le 2e 6 et le 3e 2.

Digitized by Google

441. Problème XXXIX. — *A travaille 6 jours de plus que B, pour un salaire différent; A gagne en tout 96 fr. et B 54 fr. Si A travaillait le nombre des jours de B et B le nombre des jours de A, ils recevraient chacun la même somme. — Combien de jours chacun a-t-il travaillé, et quel est leur salaire journalier?*

Solution.—Si A travaillait le même nombre de jours que B, et B le même nombre de jours que A, ils gagnent la même somme ; il résulte de là que le produit du nombre des jours de B par le salaire journalier de A est égal au produit du nombre des jours de A par le salaire journalier de B ; et, l'on peut écrire :
le n des jours de A : n. des j. de B = le s. j. de A : s. j. de B ;
d'ailleurs on a identiquement :
le n. des jours de A : n. des j. de B = le n. des j. de A : n des j. de B
et en multipliant les deux égalités terme à terme :
le carré du n. des j. de A : carré du n. des j. de B = 96 : 54 ou 16 : 9 ;
en extrayant la racine carrée de tous les termes :
le n. des j. de A : n. des j. de B = 4 : 3 ;
donc aussi
le n. des j. de A : la différence des 2 n. de j. ou 6 = 4 : 1 ;
donc le n. des j. de A = 24 ;
" " B = 24 — 6 = 18 ;
le salaire journalier de A = $\frac{96}{24}$ = 4 fr.
" " B = $\frac{54}{18}$ = 3 fr.

442. Problème XL. — *On a deux pièces de vin de prix différents, contenant, la 1re 176 litres, et la 2e 324 l. On tire de chaque pièce la même quantité de vin, et on met dans la 1re ce qu'on a tiré de la 2e et réciproquement. Quelle quantité de vin a-t-on dû aussi échanger pour que les deux pièces de vin soient de même qualité?*

Solution. — Pour que les deux pièces de vin soient de même qualité il faut que la proportion des vins de l'un et de l'autre prix soit la même dans l'une et dans l'autre pièce. Cela posé représentons par q la quantité de vin prélevé dans chaque pièce ; dans l'un des tonneaux il y aura q litres de la 1re qualité, p. ex., et $176 - q$ de la 2e et l'on doit avoir

$$\frac{9}{176 - q} = \frac{324 - q}{q} = \frac{324}{176},$$

en faisant la somme des numérateurs et des dénominateurs (218bis).

Digitized by Google

On déduit de cette formule que $176 \times q = 176 \times 324 - 324 \times q$, ou bien que $176 \times q + 324 \times q = 176 \times 324$, donc $500 \times q = 176 \times 324$, et $q = 176 \times 324 : 500 = 114{,}048$ litres.

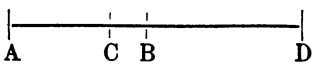
443. Problème XLI. — *Le fondateur d'une société enrôle chaque année un membre ; pendant chacune des années qui suivent celle de son enrôlement, chaque premier membre en enrôle un 2e, chaque 2e un 3e, et ainsi de suite. Quel sera le nombre total des membres au bout de la 8e année ?*

Solution. — On fera le tableau suivant :

Nombre des 1ers	membres	1+	1+	1+	1+	1+	1+	1+	1=	8
" 2mes	"	.	1+	2+	3+	4+	5+	6+	7=	28
" 3mes	"	.	.	1+	3+	6+	10+	15+	21=	56
" 4mes	"	.	.	.	1+	4+	10+	20+	35=	70
" 5mes	"	.	.	.	.	1+	5+	15+	35=	56
" 6mes	"	.	.	.	.	.	1+	6+	21=	28
" 7mes	"	.	.	.	.	.	.	1+	7=	8
" 8mes	"	.	.	.	.	.	.	.	1=	1
Totaux.		1+	2+	4+	8+	16+	32+	64+	128=	255

444. Problème XLII. — *Si je donne* 4706,10 *fr. pour acquitter une dette, je paie une somme trop considérable, dont l'excédant est le triple du déficit qu'il y aurait si je ne donnais que* 1562,30 *fr. — Quelle est ma dette ?*

Solution. — Traçons une ligne AB qui représente la dette ; AC représente les 1562,30 fr. et AD représente les 4706,10 ; d'après l'énoncé, BD vaudra 3 fois BC ; or, si de AD = 4706,10 on retranche BC = 1562, 30, le reste CD = 3143,80 vaut 4 fois BC ; donc BC = 785,95 fr. ; et la dette AB = AC + CB = 1562,30 + 785,95 = 2348,25 fr.



445. Problème XLIII. — *Une personne dit à une autre : j'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez ; et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux* 63 *ans. Quel est mon âge ?*

Solution. — Pour obtenir l'âge que vous aviez quand vous aviez mon âge actuel, je dois diminuer votre âge actuel de la différence de nos deux âges ; et pour avoir mon âge à cette époque, je dois aussi diminuer le mien de la même différence ; mais votre âge actuel vaut le double de cet âge que j'avais,

Digitized by Google

de sorte que votre âge actuel vaut deux fois votre âge actuel moins quatre fois la différence ; donc votre âge actuel vaut 4 fois la différence de nos deux âges.

Quand j'aurai l'âge que vous avez, vous aurez la différence en plus, de sorte que nos deux âges vaudront 2 fois votre âge actuel plus la différence, donc 8 fois la différence plus la différence ou 9 fois la différence ; cette somme est de 63 ans, donc la différence de nos âges est de 7 ans.

Vous avez 4 fois cette différence, ce qui fait 28 ans.

446. Problème XLIV. — *Partagez, entre trois personnes,* 21 *tonneaux, dont* 7 *pleins,* 7 *vides et* 7 *demi-vides, de façon que chacun ait la même quantité de vin et de tonneaux ; les tonneaux ont tous la même contenance.*

Solution. — Le contenu total étant de 21 demi-tonneaux, chaque part devra être de 7 demi-tonneaux, et devra donc contenir un nombre impair de tonneaux demi-pleins, inférieurs à 7 ; par conséquent 1, 3 ou 5.

On pourra donc donner à chacune des deux premières personnes, 1 ou 3 tonneaux demi-pleins indifféremment, ce qui oblige à leur donner 3 ou 2 tonneaux pleins pour compléter les 7 demi-tonneaux.

Par suite on a les deux solutions suivantes :

	Tonn pleins		vides		demi-pleins.	
1re personne. . .	3	2	3	2	1	3
2e " . . .	3 ou	2	3 ou	2	1 ou	3
3e " . . .	1	3	1	3	5	1

447. Problème XLV. — *Les trois Grâces rencontrent les neuf Muses. Les Grâces portent chacune un nombre égal d'oranges et elles en donnent à chacune des Muses un même nombre ; il arrive alors que les Muses en ont chacune autant qu'il en reste à chacune des Grâces. — Combien chaque Grâce avait-elle d'oranges, et combien chacune en a-t-elle donné à chaque Muse ?*

Solution. — Chaque Grâce donne en tout 9 fois ce qu'elle donne à une Muse et chaque Muse a en tout 3 fois ce qu'elle reçoit de chaque Grâce ; donc le nombre des oranges qu'a chaque Grâce diminué de 9 fois le nombre que chaque Grâce donne à une Muse = le nombre des oranges qu'a une Muse ou 3 fois ce que donne une Grâce ; ou bien enfin ce que *possède une Grâce vaut* 12 *fois ce qu'elle donne à une Muse.* Il n'y a pas d'autre condition et le problème est indéterminé.

Digitized by Google

Par ex. supposons que chaque Grâce donne *une* orange à chaque Muse, alors chaque Grâce a eu d'abord 12 oranges et chaque Muse en aura 3 avec le don des Grâces ; en effet chaque Grâce donnant une orange à chacune des 9 Muses, il lui en reste 12 — 9 = 3, et chaque Muse en reçoit 3 ce qui est le même nombre ; pour que chaque Grâce donne 2 oranges à chaque Muse, il faut que chaque Grâce ait 12 × 2 or. = 24 or.; en effet 2 or. à chacune des 9 Muses font en tout 18 or.; il en reste 24 — 18 = 6 à chaque Grâce et chaque Muse a 3 × 2 or. = 6 or., nombre égal.

448. Problème XLVI. — *Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube*[1].

Solution. — Le nombre et son cube divisés par 9 doivent donner le même reste ; un cube étant nécessairement un multiple de 9 ou ce multiple plus ou moins un, il en est de même des nombres satisfaisants à la condition posée.

Ces nombres ne peuvent se trouver que parmi les nombres d'un ou deux chiffres, car, le cube d'un nombre de trois chiffres ayant au plus neuf chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à 81 < 100.

Le cube d'un nombre de deux chiffres ayant au plus six chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à 54.

Il faut exclure 53, dont le cube est terminé par 7, la somme des chiffres ne pouvant excéder 52 ; de même que 44, 45, 46 dont le cube, composé de cinq chiffres, est terminé par 4, 5 ou 6, la somme des chiffres ne peut excéder 42.

En formant les cubes des nombres satisfaisant à la condition d'être des multiples de 9 ou des multiples de 9 plus ou moins un de 1 à 37, on trouve les solutions suivantes :

Nombres.	1,	8,	17,	18,	26,	27[2],
Cubes.	1,	512,	4913,	5382,	17576,	19683.

Il n'y a pas d'autre solution.

Remarque. — Cette méthode d'exclusion peut être utilement employée pour la résolution de certains problèmes.

---

1. Ce problème a été proposé dans les *Nouvelles annales de Mathématiques* de Gérono, par M. Laisant et résolu par M. Morel-Blanc.

2. Ces nombres jouissent d'une propriété fort curieuse ; c'est que leur somme augmentée de l'exposant 3 d'un cube fait précisément le carré de 10.

Digitized by Google

449. Problème XLVII. — *Quelques personnes voudraient acheter un objet en commun ; la dépense totale serait de* 144 *fr. ; 3 personnes s'associent encore aux premières pour cet achat et la part de chaque personne est ainsi diminuée de* 4 *fr. Combien y avait-il d'abord de personnes.*

Solution. — Représentons le nombre primitif de personnes par n et la part de chacune par p ; avec le concours de 3 personnes , il y a $n + 3$ personnes et la part de chacune est de $p - 4$; comme la somme totale est restée la même, on peut écrire·

$$n \times p = (n + 3) \times (p - 4) = 144,$$

d'où la proportion

$$n + 3 : n = p : p - 4$$

ou bien, en vertu d'une propriété des proportions

$$3 : n = 4 : p - 4,$$

donc aussi $3 \times p : n \times p = 4 : p - 4$

ou bien $3 \times p : 144 = 4 : p - 4$

ou plus simplement $p : 48 = 4 : p - 4$

d'où $p\,(p - 4) = 192$

Le problème est ramené à trouver deux nombres dont la différence est 4 et le produit 192 ; pour trouver ces nombres décomposons 192 en ses facteurs premiers ; il vient :

$192 = 2^6 \times 3 = 2 \times (2^5 \times 3) = 2^2 \times (2^4 \times 3) = 2^3 \times (2^3) = 2^4 \times (2^2 \times 3)$ etc.

Le seul produit dont la différence des facteurs est 4 est $2^4 \times (2^2 \times 3)$ ou 16×12 ; donc $p = 16$ et $n = 144 : p = 144 : 16 = 9$.

Réponse. — Il y avait primitivement 9 personnes qui auraient du payer 16 fr. chacune ; en effet, s'il y avait 3 personnes de plus il y aurait 12 personnes qui ne paieraient plus que 144 : 12 = 16 — 4 fr. (Note XXXII.)

Digitized by Google

Questions proposées dans les concours des Athénées et des Collèges.

I Un homme laisse en mourant 22000 fr. et veut que sa veuve ait trois fois autant que chacun de ses deux fils, et chaque garçon le double de la part de sa fille. Que revient-il à chacune de ces quatre personnes ? (4e latine, 1848).

II. A quel taux d'intérêt simple faudrait-il placer un capital pour qu'au bout de 15 ans il se fût accru dans le rapport de 5 à 8 ? (4e latine, 1849).

III. Partagez la somme de 7070 fr. entre 4 personnes, d'après les conditions suivantes : quand la 1re en reçoit 6, la 2de doit en avoir 8 ; quand la 2me en a 4, la 3me doit en avoir 6 ; et la 4me doit en recevoir 12 quand la 3me en reçoit 10. (4e latine, 1850).

IV. J'ai acheté 100 bouteilles d'eau-de-vie à Bordeaux, à 1,50 fr. le litre, et les ai vendues en Angleterre à 5 shillings 6 deniers le gallon (de 3,884 litres) tous frais déduits. La livre sterling étant au cours de 25,40 fr., quel est le bénéfice de cette spéculation ? (Section commerciale, 1851).

V. Deux négociants ont fait une entreprise dans laquelle le 1er a mis 9000 fr. pendant 7 mois et le 2d 16000 fr. pendant 4 mois ; le bénéfice sur lequel on a prélevé 12 °/o pour couvrir une dépense imprévue, se réduit à 5280 fr. Quelle est la part de chacun dans ce bénéfice ? Quel eût été le bénéfice total sans cette dépense imprévue ? (3e professionnelle, 1852).

VI. Combien y a-t-il d'or et d'argent dans un alliage qui pèse 12 kilogr., et dont le poids dans l'eau se réduit à 11,328 kg. On sait que l'or pesé dans l'eau perd les 0,052 de son poids et que l'argent y perd les 0,099 de son poids (ibid)

VII. 35 ouvriers ont fait en 15 jours, un travail de 270 mètres, dont la difficulté était représentée par $\frac{7}{9}$. D'un autre côté, 50 ouvriers de même force que les premiers et travaillant pendant le même nombre d'heures par jour, ont fait un travail de 999 m., dont la difficulté était $\frac{4}{11}$. On demande pendant combien de jours ces derniers ont travaillé (4e latine, 1854).

VIII. A quelle heure aura lieu la rencontre de deux courriers qui marchent en sens contraire et sont d'abord séparés par un intervalle de 34 kilom. ? Le 1er courrier part à 1 h. 20′ et fait 7 kilom. à l'heure ; le 2d se met en route à 2 h. seulement et fait 9 kilom. à l'heure (4e latine, 1855).

IX Trois personnes achètent un numéro à la loterie ; la 1re paie 150 fr. ; la 2de 75 fr. et la 3e 25 fr. : leur no commun donne un gain de 1300 fr. Combien chacune aura-t-elle ? (4e latine, 1857).

X. Partager 1023 fr. entre trois personnes, de manière que la 2de ait 2 fr., lorsque la 1re en reçoit 3, et que la 3e reçoive 4 fr., lorsque la 2de en a 5. (4e latine, 1859).

XI. Trois fontaines A, B, C donnent ensemble 206 litres d'eau par minute. La fontaine B ne fournit que les $\frac{5}{7}$ de la quantité d'eau que donne la fontaine A, et si la fontaine C donnait 10 litres de plus, elle fournirait la moitié de ce que les deux autres donnent ensemble. On demande combien de litres d'eau chaque fontaine donne par minute (4e latine, 1861).

XII. Un homme laisse la moitié de sa fortune évaluée à 732582 fr. à son frère; un neuvième à son cousin, et le reste aux hospices. On demande 1o si l'on peut

Digitized by Google

affirmer, préalablement à tout calcul, que les trois parts formeront des nombres entiers de francs ; 2° de démontrer, dans le cas d'affirmative, les théorèmes sur lesquels peut reposer cette affirmation ; 3° enfin de calculer les trois parts (4e latine, 1871).

XIII. Quatre personnes ont constitué une société au capital de 120000 fr., et dont elles doivent se partager les bénéfices proportionnellement à leurs mises. La mise du 1er associé a servi aux frais de premier établissement ; la mise du 2me aurait été le tiers de la mise du 1er, s'il avait donné 2000 fr. de plus ; il a manqué au 3me associé 5000 fr. pour que sa mise pût former une somme égale à la moitié de celle qu'ont fournie ensemble les deux premiers ; enfin, la mise du 4me n'a été que le cinquième de la somme des mises de ses trois associés. Le bénéfice de la société ayant été de 8400 fr., on demande quelle sera la part de chaque associé dans ce bénéfice (ibid.).

XIV. On fait partir d'Ostende pour Verviers un courrier qui parcourt 8 kilom. dans une heure ; neuf heures après, on fait partir, pour la même destination, un 2d courrier, qui fait 12 kilom. en une heure. A quelle distance de Verviers celui-ci atteindra-t-il le 1er, les deux villes étant distantes de 240 kilom. ?

A quelle distance de Verviers se rencontreraient les deux courriers, si celui qui fait 8 kilom. en une heure partait d'Ostende et si, au même instant, l'autre courrier partait de Verviers pour aller à la rencontre du premier ? (4e latine, 1873.)

XV. Trois ouvriers A, B, C font ensemble par jour, 132 m. d'ouvrage ; B ne fait que les $\frac{5}{7}$ de l'ouvrage de A, et si C faisait 12 m. de plus, il ferait la moitié de ce que A et B font ensemble. On demande combien de mètres d'ouvrage chaque ouvrier fait par jour (4e latine, 1874).

XVI. 27 ouvriers ont fait, en 18 jours, un travail de 810 m., dont la difficulté était représentée par $\frac{7}{12}$. D'un autre côté, 48 ouvriers ayant la même force que les premiers et travaillant pendant le même nombre d'heures par jour, ont fait un travail de 1260 m., dont la difficulté était représentée par $\frac{5}{9}$. On demande pendant combien de jours ces derniers ont travaillé (4e latine, 1878).

XVII. Deux négociants se sont associés pour une entreprise qui a duré 18 mois et dans laquelle ils ont gagné 23000 fr. Le premier a mis 3000 fr. au commencement de l'entreprise et a ensuite retiré 20000 fr. au bout de 12 mois. Combien a dû mettre le 2d pendant les 10 derniers mois pour avoir 9000 fr. dans le bénéfice ? (4e latine, 1880.)

XVIII. 18 ouvriers dont la force est représentée par 3, ont fait en 25 jours 1200 m. d'ouvrage dans un terrain dont la difficulté est représentée par $\frac{3}{4}$. D'un autre côté, 20 ouvriers, avec 2 de force et travaillant pendant le même nombre d'heures par jour que les premiers, ont fait 1500 m. d'ouvrage dans un terrain dont la difficulté est représentée par $\frac{4}{5}$. On demande pendant combien de jours ces derniers ont travaillé (4e latine, 1881).

XIX. Trois personnes ont mis en commun à intérêt une somme de 16000 fr. Au bout de 5 ans, elles ont retiré, tant pour le capital que pour les intérêts simples, la première 5000 fr., la seconde 6250 fr., et la troisième 8750 fr. Trouver les mises particulières et le taux de l'intérêt (4e professionnelle, 1882).

XX. On a une sphère en bois de 15 centimètres de rayon ; quel sera le diamètre de la sphère en fer qu'il faudra y attacher pour que la boule s'enfonce dans l'eau des trois quarts du diamètre ? La densité du bois est 0,8, celle du fer est 7,7. (1re commerciale, 1886.)

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDICE I

DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE NUMÉRATION.

On peut montrer facilement que le système duodécimal aurait de sérieux avantages, pour le calcul, sur notre système décimal parce que la base 12 a plus de diviseurs que la base 10; mais il serait fort difficile de changer maintenant de système, parce qu'il faudrait changer entièrement nos usages et aussi les dénominations qui nous sont familières dès l'enfance (1). Les conventions de la numération écrite pourraient être conservées; seulement il faudrait employer autant de chiffres significatifs qu'il peut y avoir tout au plus d'unités de chaque ordre, donc $B - 1$, en désignant la base par B, ce qui fait, avec le zéro, B chiffres en tout (2). Dans le système duodécimal on est généralement convenu de désigner le nombre 10 par la lettre grecque α et le nombre 11 par β. Exemple $3\beta 0\alpha 86$ représente, pour $B = 12$, un nombre composé de six unités du 1er ordre, huit du 2e, α ou dix du 3e, β ou onze du 5e et trois du 6e.

Une difficulté aussi se présente quand on veut lire un nombre écrit dans un système dont la base n'est pas 10; il serait peut-être bon de convenir d'appeler dix, cent, mille, etc., comme dans la numération décimale, les puissances successives de la base; ainsi le nombre servant d'exemple se lirait 3 cent β dix mille et dix cent quatre-vingt six.

Dans tout système $B^0 = 1$, $B^1 = 10$, $B^2 = 100$, $B^3 = 1000$...; et si l'on désigne par a, b, c... les chiffres du 1er, du 2e, du 3e... ordre d'un nombre N écrit dans la base B, on aura $N = a + b\,B + c\,B^2 + \ldots\ldots$

On peut démontrer *que tout nombre entier* N *peut être représenté, dans une base quelconque, par cette formule composée d'un nombre fini de termes et dans laquelle* a, b, c... *sont des nombres entiers plus petits que* B.

---

(1) Il existe un ouvrage anglais de John King (Buckingham, 1802) pour établir le système à base 8.

(2) Il n'est pas hors de propos de remarquer que le caractère 0 n'est pas précisément indispensable; mais en n'en faisant pas usage, il résulte deux inconvénients assez grands pour en motiver l'emploi. En effet, soit proposé, par exemple, d'établir le système *ternaire* en adoptant les trois chiffres significatifs 1, 2, 3. Pour représenter quatre, cinq et six, il suffirait d'écrire 11. 12. 13: pour exprimer sept, huit et neuf, on écrirait 21. 22 23 et l'on voit de suite l'inconvénient de cette notation: puisque les unités d'un même ordre seraient ainsi exprimées d'une manière différente; ainsi dans 13 et 23 le chiffre 3 exprime une unité du 2e ordre comme le chiffre 1 et 2 qui sont à la gauche.

Digitized by Google

En effet, si $N = a < B$, on a $N = a$, ce qui rentre dans la formule précédente ; soit donc $N > B$; divisons N par B et soit q_1 le quotient et a le reste, alors $N = a + q_1 B$ qui rentre dans la formule précédente si $q_1 < B$; mais si $q_1 > B$, on divisera q_1 par B et si q_2 est le quotient et b le reste, l'on aura $q_1 = b + q_2 B$, d'où $N = a + b\,B + q_2\,B^2$ et ainsi de suite ; comme les quotients q_1, q_2... vont toujours en diminuant, on arrivera nécessairement à un dernier reste $q_n < B$; considérons alors les égalités : $N = a + q_1\,B$, $q_1 = b + q_2\,B$, $q_2 = c + q_3\,B$, ..., $q_{n-1} = r_n + q_n\,B$; en les multipliant respectivement par 1, B^1, B^2... B^{n-1}, puis en les aditionnant membre à membre et en réduisant, il vient enfin $N = a + b\,B + c\,B^2 + \ldots + r_n\,B^n$.

Le système binaire met en évidence cette propriété remarquable dont jouit tout nombre entier : *d'être la somme d'un certain nombre de puissances de 2, répétées chacune une seule fois*, car l'expression de tout nombre dans le système binaire sera de la forme $N = a.\,2^0 + b.\,2 + c\,2^2 + \ldots$ dans laquelle les chiffres a, b, c... sont 1 ou 0.

Les règles de calcul ne varient pas avec la base, car les raisonnements qu'on fait pour les établir sont indépendants du système de numération qu'on adopte.

Exemples : 1° 2352 + 1541 + 3720 = 12253 ($B = 6$).

On fait la somme 2 + 1 + 0 = 3, des unités du 1er ordre; puis 5 + 4 + 2 = onze unités du second ordre, ce qui fait 15 dans la base 6 ; on pose 5 et l'on retient 1 ; et ainsi de suite.

2° 70326 — 57265 = 11041 ($B = 8$).

5 de 6, il reste 1 ; 6 de 2, ne se peut ; 6 de B ou 8 il reste 2 + 2 = 4 ; comme on a ajouté B ou 8 au 2e chiffre du nombre supérieur, on ajoutera 1 au 3e chiffre du nombre inférieur ; on dira donc 3 de 3, il reste 0 ; et ainsi de suite.

3° On exécutera facilement les opérations suivantes pour $B = 12$; elles n'offrent aucune difficulté, mais elles demandent quelque attention et une grande pratique du calcul.

Multiplication

```
   34 α 7
    9 β α
  -------
  2α09 α
 31585
267β3
-------
2α0302 α
```

Division

```
2α0302α | 34α7
267β3   | -----
-------   9βα
 34392
 31585
 -----
  2α09α
  2α09α
  -----
     0
```

Digitized by Google

Élévation au carré

```
   50 α 8
   50 α 8
  ------
   34714
  428α8
 21454
 ---------
 218β7594
```

Extraction de la racine carrée

```
218β5594 | 50α8
21       |-------------
---------| α0α  | α188
 08β5/5  |   α  |    8
   8484  |------|------
 -------- 8484  |69194
   6919/4 |
   69194  |
 --------
       0
```

Problème. — *Un nombre est écrit dans le système dont la base est B, trouvez son expression dans le système B^1.*

1re *méthode.* — Soit le nombre 23104 écrit dans le système $B = 5$ à exprimer dans le système $B^1 = 10$. On fera le raisonnement suivant :

```
23104
13
 66
 330
 1654
```

2 unités du dernier ordre à gauche valent 5×2 unités de l'ordre précédent $+ 3 = 13$ unités de cet ordre ; 13 unités valent 5×13 unités de l'ordre précédent $+ 1 = 66$ unités de cet ordre ; et ainsi de suite jusqu'à la fin. On trouve ainsi que 23104 ($B = 5$) $= 1654$ ($B = 10$).

Autre exemple de la même méthode ; soit encore 23104 ($B = 6$) à convertir en un nombre du système duodécimal ; on dira encore

```
23104
11
 56
 236
 β5α
```

2 unités du dernier ordre à gauche valent 5×2 unités de l'ordre précédent $+ 3 =$ treize unités de cet ordre ; cette somme s'exprime par 11 dans le système duodécimal ; 11 unités valent 5×11 unités de l'ordre précédent $+ 1 = 56$ de cet ordre ; et ainsi de suite jusqu'à la fin. On trouve ainsi que 23104 ($B = 5$) $= \beta\ 5\ \alpha$ ($B = 12$).

Cette 1re méthode peut être employée avantageusement quand $B^1 = 10$.

2e *méthode.* — En opérant dans le système B, on divise successivement par B^1, le nombre donné, puis le 1er quotient, le 2e quotient, etc., jusqu'à ce qu'on trouve un quotient plus petit que B^1 : les restes successifs écrits dans la base B^1 sont respectivement les unités du 1er, du 2e..... ordre du nombre écrit dans la base B^1.

Exemples. — Soit le nombre 1654 écrit dans le système décimal à exprimer dans le système dont la base est $B = 5$.

```
1654 | 5
   4 | 330 | 5
       0   | 66 | 5
           1  | 13 | 5
              |  3 | 2
```

1654 (B=10)=23104 (B= 5)

Puisque pour le système dont la base est $B = 5$, il faut 5 unités d'un certain ordre pour faire une unité de l'ordre suivant, il y aura autant d'unités du 2e ordre qu'il y a de fois 5 en 1654 ; ce qui fait 330 unités du 2e ordre et il reste 4 unités du 1er ; de même en divisant 330 par 5, on trouve 66 unités du 3e ordre et 0 unité du 2e et ainsi de suite.

Digitized by Google

Soit encore le nombre 23104 ($B = 5$) à exprimer dans le système duodécimal.

23104	22
20	1022 | 22
α	10 | 21
	5 | β

Dans le système dont la base est 5, douze s'exprime par 22 ; on divise donc 23104 par 22, dans la base 5 ; on a pour quotient 1022 et pour reste 20, ce qui, dans le système duodécimal, s'exprime par α ; on divise 1022 par 22 ; on a pour quotient 21 $= \beta$ dans le système duodécimal et pour reste 10 $= 5$ dans le système duodécimal ; donc 23104 ($B = 5$) $= \beta 5 \alpha$ ($B = 12$).

Cette méthode sera employée surtout quand $B = 10$.

3e *méthode.* — On passe du système dont la base est B au système décimal au moyen de la 1re méthode, puis du système décimal au système dont la base est B' au moyen de la 2e méthode ; de cette manière on opère toujours dans le système décimal.

Exemple. — Soit à passer de l'expression 23104 ($B = 5$) à celle du même nombre dans le système duodécimal.

D'abord 23104 ($B = 5$) $=$ 1654 ($B = 10$) (1re méthode) ;
puis 1654 ($B = 10$) $= \beta 5 \alpha$ ($B = 12$) (2e méthode) ;
donc 23104 ($B = 5$) $= \beta 5 \alpha$ ($B = 12$).

Théorème. — *Si* B *est un nombre impair, tout nombre* N *non supérieur à* B^n *peut se mettre sous la forme* $a + b B + c B^2 + \ldots + h B^n$, a, b, c... h *étant des nombres entiers, précédés du signe* + *ou du signe* —, *compris entre* $-\frac{1}{2}$ B *et* $+\frac{1}{2}$ B.

En effet, soit $N < \frac{1}{2} B$ alors N sera de la forme a ; puis, soit N compris entre $\frac{1}{2} B$ et B; on obtiendra N en retranchant de N un nombre plus petit que $\frac{1}{2} B$ ou a; donc $N = -a + B$.

Les nombres compris entre B et $\frac{1}{2} B^2$ s'obtiennent en ajoutant à B les $\frac{1}{2}(B^2 - 1) - B$ ou $[\frac{1}{2}(B - 1) - 1] B + \frac{1}{2}(B - 1)$ premiers nombres entiers ; ils sont de la forme $b B + a$. a et b ne pouvant dépasser $\frac{1}{2}(B - 1)$; enfin les nombres compris entre $\frac{1}{2} B^2$ et B^2 s'obtiennent en retranchant de B^2 les nombres inférieurs à $\frac{1}{2} B^2$; ils peuvent donc être représentés par $B^2 \mp b B \mp a$.

On démontrera ensuite que le principe ayant été vérifié pour tous les nombres jusqu'à B^n, on peut encore l'étendre aux nombres compris entre B^n et B^{n+1} ; et ainsi de suite.

On déduit de ce principe général la solution du problème suivant : *On possède un poids d'un gramme, un poids de 3 grammes, un poids de 3^2 grammes, un poids de 3^3 grammes, etc. Montrez qu'on peut peser, à l'aide d'une*

Digitized by Google

balance et de ces poids, un objet dont le poids N *est un nombre quelconque de grammes.*

D'après le principe précédent a, b, c... représentant des nombres compris entre $\frac{3}{2}$ et $+\frac{3}{2}$, c'est-à-dire en valeur absolue égaux à 0 ou 1, on pourra écrire $N = \pm a \pm b\,3 \pm c\,3^2 \pm d\,3^3 \pm \ldots\ldots$

Soit par exemple $N = 59$; si l'on écrit ce nombre dans le système dont la base est 3; on trouve $N = 59 = 2 + 1.3 + 0\,3^2 + 2.3^3 = 3 - 1 + 1.3 + (3 - 1)\,3^3 = -1 + (3 - 1)\,3 + 3^4 - 3^3 = -1 + 3^2 - 3 + 3^4 - 3^3$.

La pesée de l'objet pourra donc s'effectuer d'après l'égalité.

$59 + 1 + 3 + 3^3 = 3^2 + 3^4$. (Voir *M.* année 1882, p. 183.)

M. Cauchy s'est occupé (*C. R. A.*, tome XI, p. 789) de nombres avec 2 espèces de chiffres positifs ou négatifs dont la valeur ne dépasserait pas 5.

Exemple : $9 = 10 - 1$ ou conventionnellement $1\bar{1}$; $81 = 101 - 20 = 1\bar{2}1$; en général, on remplace, dans le nombre écrit suivant la notation que nous employons, chaque suite continue de chiffres positifs et supérieurs à 4 par des chiffres négatifs (surmontés d'un trait) qui forment, au signe près, le complément arithmétique de cette suite, en ajoutant au chiffre qui la précède une seule unité. Si le dernier chiffre de la suite était 5, on pourrait à la rigueur ne pas s'en occuper et l'exclure de la suite; mais alors même, à moins que la suite ne se trouve réduite au seul chiffre 5, il sera mieux de rendre ce chiffre négatif, afin de diminuer autant que possible la valeur numérique du chiffre précédent.

Exemple : Au moyen de ces conventions on peut écrire :

$$976471158 = 10\bar{2}\bar{4}5\bar{3}12\bar{4}\bar{1}$$

Les nombres écrits sous cette forme sont susceptibles de tous les calculs qu'on fait avec les nombres dont tous les chiffres sont positifs; seulement on devra appliquer les règles des signes qu'on démontre en algèbre.

Voici quelques exemples de ces calculs, qui serviront à donner une idée de la marche à suivre :

1° 9978×8256 ; on a $9978 = 100\bar{2}\bar{2}$ et $8256 = 1\bar{2}3\bar{4}\bar{4}$;

$$\begin{array}{rcl}
1\bar{2}3\bar{4}\bar{4} & = & 8256 \\
100\bar{2}\bar{2} & = & 9978 \\
\hline
\bar{2}35\bar{1}\bar{2} & & \\
\bar{2}35\bar{1}\bar{2} & & \\
1\bar{2}3\bar{4}\bar{4} & & \\
\hline
\text{Produit } 1\bar{2}2\bar{4}\bar{2}2\bar{4}3\bar{2} & = & 82378368
\end{array}$$

Digitized by Google

M. Cauchy passe ensuite des formules :

$$11^2 = 121,\ 12^2 = 144,\ 13^2 = 169,\ \text{etc.}$$

à celles-ci : $11^2 = 1\bar{2}1,\ 1\bar{2}^2 = 1\bar{4}4,\ 1\bar{3}^2 = 1\bar{6}9,$ etc.

ou bien : $9^2 = 81,\ 8^2 = 64,\ 7^2 = 49,$ etc.

De même des formules :

$1013^2 = 1026169,\ 1006^3 = 1018108216$ qui se déduisent aisément et presque sans calcul du binôme de Newton, il passe immédiatement aux suivants :

$10\bar{1}\bar{3}^2 = 10\bar{2}\bar{6}169,\ 100\bar{6}^3 = 10\bar{1}\bar{8}108\bar{2}\bar{1}\bar{6}$, etc., qui peuvent s'écrire $987^2 = 974169$; $994^3 = 982107784$, etc.

Enfin, dans la réduction des fractions ordinaires en décimales, la période sera connue dès qu'on retrouvera le même reste au signe près, et cette période sera composée de deux parties semblables l'une à l'autre, abstraction faite du signe.

Exemple : $\frac{1}{7} = 0.143\bar{1}\bar{4}\bar{3}143\bar{1}\bar{4}\bar{3}\ldots = 0.142857142857\ldots$

$\frac{1}{11} = 0.1\bar{1}1\bar{1}1\bar{1}\ldots = 0.090909\ldots$

$\frac{1}{13} = 0.1\bar{2}\bar{3}\bar{1}231231231\ldots = 0.769230769230\ldots$

EXERCICES

1. Pour la base B combien y a-t-il de nombres de N chiffres?
2. Exprimez 10000 puis 1828 ($B = 10$) dans le système septénaire.
3. Faites passer 444 du système quinaire au système septénaire.
4. Écrivez les six premiers termes de la série $1, 10, 10^2\ldots$ ($B = 10$) exprimez-les et additionnez-les dans le système sexténaire et ramenez le résultat au système décimal.
5. Faites passer les nombres 1756 et 345 du système octénaire au nonaire; multipliez-les dans les deux systèmes et divisez le résultat dans chaque cas par le premier des deux nombres.
6. Exprimez dans le système dont la base est 8, le plus grand et le plus petit nombre de 4 chiffres.
7. Réduisez à sa plus simple expression la fraction $\frac{340}{642}$ ($B = 7$).
8. Exposez les propriétés des fractions qui ont pour dénominateur B^m.

Digitized by Google

APPENDICE II (page 9)

NUMÉRATION DES GRECS ET DES ROMAINS.

Il est utile de connaître la numération des Romains parce qu'elle est encore en usage aujourd'hui : on s'en sert pour les inscriptions sur les monuments; pour les chapitres, les divisions et quelquefois la pagination des livres; pour les cadrans des horloges, etc.

Tout le système des Romains repose sur les *sept* nombres

1, 5, 10, 50, 100, 500, et 1000

qui sont représentés par les letttres suivantes :

I, V, X. L, C, D, et M (1).

Pour *deux* ou *trois* unités de l'un des quatre premiers ordres décimaux (I, X, C, M) on répète deux ou trois fois la lettre correspondante 2 = II, 30 = XXX.

Pour *quatre* unités simples, dizaines ou centaines, on écrit *cinq* unités de l'ordre correspondant moins une, ce qui se fait en plaçant l'unité à soustraire à gauche des cinq unités : 4 = 5 — 1 = IV; 40 = 50 — 10 = XL.

Pour *six*, *sept*, *huit* unités des mêmes ordres décimaux, on écrit cinq plus un, cinq plus deux ou cinq plus trois unités de l'ordre considéré en écrivant à la droite du signe représentatif de l'ordre le nombre d'unités à ajouter : 6 = 5 + 1 = VI; 70 = 50 + 20 = LXX; 800 = 500 + 300 = DCCC.

Pour *neuf* unités d'un ordre décimal (I, X, C, M) on écrit dix unités moins une : 9 = 10 — 1 = IX, 90 = 100 — 10 = XC, 900 = 1000 — 100 = CM.

D'après ce qui précède, on écrit un nombre quelconque inférieur à *deux mille* en plaçant à la droite du nombre des mille le nombre des centaines, puis celui des dizaines, enfin celui des unités simples. *Exemple :* 13 = XIII, 14 = XIV, 35 = XXXV, 66 = LXVI, 248 = CCXLVIII, 432 = CDXXXII, 1890 = MDCCCXC.

---

(1) Pour varier on se sert du même système avec des lettres minuscules. j pour I, ij pour II iij pour 3, jb pour IV, x pour X, ce sont les chiffres dits *français* ou *financiers*.

Digitized by Google

Il n'y a guère d'intérêt à connaître la manière d'écrire les nombres supérieurs à mille ; voici pourtant quelques nombres particuliers : 500 = IↃ (1) ; 1000 = CIↃ ; 10000 = $\overline{X}$; 50000 = $\overline{D}$; 100000 = $\overline{M}$.

Pline employait la barre multiplicatrice et le point avec moins de fixité que les modernes ; ainsi il écrit $\overline{XXIII}$.LXX pour 2370, $\overline{LXI}$. XXXV pour 6135400 et il y a d'autres combinaisons plus spéciales encore. (Th.-H. Martin.)

Nous pouvons faire la remarque générale suivante : dans *la numération romaine, toute lettre est diminuée de la lettre moins forte qui la précède à gauche ; et elle est augmentée de la lettre moins forte ou égale qui la suit à droite.*

Enfin voici les dénominations et représentations des fractions chez les Romains :

PREMIER SYSTÈME. — *L'as est l'unité.*

$\frac{12}{12}$ *FF*	$\frac{11}{12}$ S =—=	$\frac{10}{12}$ S = =	$\frac{9}{12}$ S3	$\frac{8}{12}$ —S—	$\frac{7}{12}$ *V*
As	*Deunx*	*Dextans*	*Dodrans*	*Bes*	*Septunx*
$\frac{6}{12}$ *S*	$\frac{5}{12}$ = — =	$\frac{4}{12}$ = =	$\frac{3}{12}$ = —	$\frac{2}{12}$ =	$\frac{1}{12}$ —
Semissis	*Quincunx*	*Triens*	*Quadrans*	*Sextans*	*Uncia*

SECOND SYSTEME. — *L'once est l'unité.*

$\frac{1}{2}$ *E*	$\frac{1}{3}$ *VV*	$\frac{1}{4}$ *G*	$\frac{1}{6}$ *V*	$\frac{1}{8}$ I	$\frac{1}{12}$ CIↃ	
Semuncia	*Duella*	*Sicilicus*	*Sexcula*	*Doachma*	*Semissecla*	
$\frac{1}{6}$ *H*	$\frac{1}{24}$ *ZZ*	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{72}$ *M*	$\frac{1}{96}$ *Z*	$\frac{1}{144}$ *CIII*	$\frac{1}{192}$ *Q*
Tremissis	*Scrupulus*	*Obolus*	*Bissiliqua*	*Ceraces*	*Siliqua*	*Chalcus*

As est un terme tarentin, d'où εἷς, un, divisé en douze parties ou *onces*. *Deunx*, un douzième ôté reste $\frac{11}{12}$. *Dextans*, un as moins un sixième, *sextans*, reste $\frac{10}{12}$. *Dodra* δοδρα, breuvage des neuf ingrédients. *Be-as*, binœ partes assis = deux tiers de l'as = bitertius. *Semi* de ημι.

(1) On représentait 1000 par CIↃ parce qu'anciennement on écrivait la lettre *m* comme un *i* avec une anse de chaque côté ; et comme 500 est la moitié de mille on écrivait IↃ qui n'est que la moitié du signe CIↃ, de même on écrivait autrefois I⊂ pour C et alors 50 moitié de 100 était représenté par |_, etc.

Digitized by Google

Sicilicus, mesure de longueur, $\frac{1}{4}$ du pouce de superficie, $\frac{1}{48}$ du *jugerum* (journal de terre), $\frac{1}{48}$ de l'heure; monnaie de deux drachmes. *Drachme*, petite monnaie grecque équivalente à peu près au denier romain. *Scrupus*, petite pointe de rocher. *Premissis*, trois vingt-quatrièmes d'once.

Numération des Grecs

Les Grecs employaient, pour désigner les nombres, les 24 lettres de leur alphabet en y intercalant trois signes particuliers : le ϛ (στίγμα) qu'ils nommaient δίγαμμα comme ayant une valeur double du γαμμα ; le ϟ (κόππα) qui vaut 90 et le ϡ (δάμπι) qui vaut 900.

Les lettres employées comme nombres, ont pour signe distinctif une sorte d'accent placé au-dessus et à droite des unités, dizaines et centaines, au-dessous et à gauche des mille, dizaines et centaines de mille, comme suit :

UNITÉS		DIZAINES		CENTAINES		MILLE	
1	α'	10	ι'	100	ρ'	1000	͵α
2	β'	20	κ'	200	σ'	2000	͵β
3	λ'	30	λ'	300	τ'	3000	͵γ
4	δ'	40	μ'	400	υ'	4000	͵δ
5	ε'	50	ν'	500	φ'	5000	͵ε
6	ϛ'	60	ξ'	600	χ'	6000	͵ϛ
7	ζ'	70	ο'	700	ψ'	7000	͵ζ
8	η'	80	π'	800	ω'	8000	͵η
9	θ'	90	ϟ'	900	π'	9000	͵θ

En se combinant, les chiffres des unités les plus élevées se plaçaient à la gauche. *Exemple :* 11 = ια', 12 = ιβ', 13 = ιγ'..., 21 = κα', 22 = κβ'.

Il y avait plusieurs manières de noter les *myriades* ou dizaines de mille. Avec le iota souscrit le caractère indiquait un nombre mille fois plus grand. *Exemple :* $\underset{\iota}{\alpha}$ = 1000, $\underset{\iota}{\beta}$ = 2000... ; avec la lettre M (initiale de Μυρία) souscrite on avait un nombre dix mille fois plus grand. *Exemple :* $\underset{M}{5}$ = 1000000. Une autre manière de représenter les grands nombres était de placer des points au-dessus des lettres. *Exemple :* ἀ = 10000, ἀ̈ = 100 millions.

Il y avait une autre manière semblable à celle des Romains pour écrire les nombres. *Exemple :* I (ἷα ou μία) = un, Π (πέντε) = 5, Δ (δέκα) = 10. H (ἑκατόν) = 100, X (χίλιοι) = 1000, M (μύριοι) = 10000. La valeur de chacune des lettres Δ, H, X, M renfermée dans Π, était multipliée par 5. *Exemple :* $\boxed{\Delta}$ = 5 × 10 ou 50 ; en général une lettre renfermée dans une autre lettre représentait le produit des nombres représentés par ces lettres. *Exemple :* $\underline{/M\backslash}$ = 10 × 10000 ou 100000.

Digitized by Google

Les fractions ayant pour numérateur l'unité étaient désignées par le dénominateur avec un accent à droite. *Exemple :* $\delta_4 = \frac{1}{4}$; mais la fraction $\frac{1}{2}$ avait quatre signes spéciaux. Dans les autres cas on écrivait le dénominateur comme nous le faisons pour les exposants. *Exemple :* $\beta^{\iota\alpha} = \frac{9}{12}$ et $\pi\alpha^{\rho\times\alpha} = \frac{81}{121}$.

APPENDICE III (page 54)

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES CONGRUENCES; APPLICATION AUX PREUVES DES OPÉRATIONS DE CALCUL (1).

Quand la différence de deux nombres entiers est divisible par un même nombre, on dit que les deux termes sont *congrus* ou *congruents* pour le diviseur commun et ce diviseur est le *module*. *Exemple :* la différence 28 — 3 ou 25 est divisible par 5 et l'on dit que 28 *est congru à 3 pour le module 5 ;* ce qu'on écrit d'une manière conventionnelle comme suit :

$$28 \equiv 3 \text{ (mod. } 5)$$

Cette formule est une *congruence;* le premier membre est 28 et le second est 3.

De même $19 \times 7 + 17 \times (5 + 3) \equiv 4 \times (2 + 3 \times 11)$ (mod. 43) est une congruence dont le 1er membre est $19 \times 7 + 17 \times (5 + 3)$ ou $133 + 136$ ou 269; le 2e membre est $4 \times (2 + 3 \times 11)$ ou 4×35 ou 140 et le module est 43; en effet la différence $269 - 140 = 129$ et c'est un multiple de 43 Soit $24 \equiv 0$ (mod. 3); cette formule exprime que 24 est divisible par 3.

PROPRIÉTÉS

I. — Le membre ayant la plus grande valeur est la somme du plus petit membre plus un multiple du module. *Exemple :* soit $28 \equiv 3$

(1) La théorie des congruences est due à Gauss, il s'en est servi pour l'analyse indéterminée ; on peut aussi l'utiliser pour l'étude des fractions continues et il serait fort désirable que l'usage des congruences se répandît davantage. Ses principes sont très simples et dans les questions relatives à la divisibilité des nombres, les restes des divisions ou *résidus* jouent un rôle plus important que les quotients dont on n'a pas à s'occuper. Voir le cours d'algèbre supérieure par J.-A. Serret, 3e éd (1866), t. II.

Digitized by Google

(mod. 5); on a $28 = 3 + \dot{5}$. Le plus petit nombre est évidemment égal au plus grand diminué d'un multiple du module.

II. — On peut sans troubler la congruence ni changer le module, augmenter ou diminuer l'un des membres d'un multiple du module. *Exemple :* soit $28 \equiv 3$ (mod. 5); on aura évidemment aussi $28 + 2 \times 5 \equiv 3$ (mod. 5).

III. — Si l'on divise séparément chaque membre par le module, les deux restes seront égaux (ils peuvent être nuls tous les deux). En effet soit $28 \equiv 3$ (mod. 5), les deux divisions $28 : 5$ et $3 : 5$ donnent le même reste; en effet $28 - 3 = \dot{5}$ donc $\frac{28-3}{5}$ ou $\frac{28}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ et pour que le 1er membre soit entier il faut que les deux restes soient égaux.

IV. — Si l'on divise un nombre par un module, le dividende et le reste sont congrus pour le diviseur comme module. *Exemple :* Si l'on divise 28 par 5, opération qui donne le reste 3, on a $28 = \dot{5} + 3$ d'où $28 - 3 = \dot{5}$ et $28 \equiv 3$ (mod. 5). Il résulte aussi de là que l'excès du dividende sur le reste est congru à 0 pour le diviseur pris comme module.

V. — On peut, sans troubler une congruence ni changer le module, augmenter ou diminuer les deux membres d'un même nombre ou les multiplier par un même nombre. *Exemple :* soit $28 \equiv 3$ (mod. 5); on a aussi $28 \pm 2 \equiv 3 \pm 2$ (mod. 5); puis $2 \times 28 \equiv 2 \times 3$ (mod. 5). La démonstration est facile.

VI. — On peut sans troubler une congruence ni changer son module, diviser les deux membres par un de leurs sous-multiples communs, pourvu que le diviseur soit premier avec le module. *Exemple :* Soit $315 \equiv 140$ (mod. 5); les deux membres sont divisibles par le nombre 7 premier avec le module 5; donc $315 : 7 \equiv 140 : 7$ (mod. 5). En effet, $315 - 140 = \dot{5} = 35 \times 5$; or tout nombre 7 qui divise séparément 315 et 140, doit diviser la différence 35×5; or 7 est premier avec 5, donc 7 doit diviser 35 (139); de sorte que $315 - 140 = 7 \times 5$ d'où $315 : 7 - 140 : 7 = 5$.

VII. — Si deux congruences pour le même module ont un membre égal, les deux autres membres sont congrus pour le même module. *Exemple :* soient les congruences $24 \equiv 9$ (mod. 5) et $54 \equiv 9$ (mod. 5), on a aussi $54 \equiv 24$ (mod. 5). En effet, $54 - 9 = \dot{5}$ et $24 - 9 = \dot{5}$; donc $(54 - 9) - (24 - 9) = \dot{5}$ ou $54 - 24 = \dot{5}$ puisqu'on a augmenté d'un même nombre les deux termes de la différence.

VIII. — Si deux congruences existent pour le même module, on peut les additionner, soustraire ou multiplier membre à membre et l'on obtiendra

Digitized by Google

une nouvelle congruence de même module. *Exemple :* soient les congruences $24 \equiv 9$ (mod. 5) et $73 \equiv 48$ (mod. 5); on aura $73 \pm 24 \equiv 48 \pm 9$ (mod. 5) et $24 \times 73 \equiv 9 \times 48$ (mod. 5). En effet, $73 = 48 + \dot{5}$ et $24 = 9 + \dot{5}$, donc $73 \pm 24 = 48 \pm 9 + \dot{5}$; ensuite $73 \times 24 = 48 \times 9 + \dot{5}$

IX. — Sans troubler une congruence ni changer le module, on peut élever les deux membres à une même puissance. C'est une conséquence du principe précédent.

Remarque. — Soient les congruences $24 \equiv 9$ (mod. 5) et $77 \equiv 2$ (mod. 5); on ne peut pas retrancher 77 de 24; dans ce cas on ajoutera à 24, par la pensée, un multiple du module qui rende la soustraction possible; pour l'exemple proposé, il faut d'abord ajouter 11×5 à 24 et l'on a $24 + 55 - 77 \equiv 9 - 2$ (mod. 5); en effet on a évidemment $2 \equiv 7$ (mod. 5).

X. — Si deux congruences existent pour le même module, on peut les diviser membre à membre et l'on obtiendra une nouvelle congruence de même module, pourvu que les membres de la 2e congruence divisent exactement ceux de la 1re congruence et qu'ils soient premiers avec le module.

Exemple : $36 \equiv 22$ (mod. 7) et $9 \equiv 2$ (mod. 7); il vient ausssi $36 : 9 \equiv 22 : 2$ (mod. 7). En effet, $36 = 22 + \dot{7}$ et $9 = 2 + \dot{7}$; donc $\frac{36}{9} = \frac{22 + \dot{7}}{2 + \dot{7}} = \frac{22}{2} - \frac{\dot{7}\left(\frac{22}{2} - 1\right)}{9}$ d'où $\frac{22}{2} - \frac{36}{9} = \frac{7 \times \text{nombre entier}}{9}$; or, $\frac{22}{2} - \frac{36}{9}$ est un nombre entier et 9 étant premier avec 7, divise le multiplicateur de 7; on a donc $\frac{22}{2} - \frac{36}{9} = \dot{7}$ d'où $\frac{22}{2} \equiv \frac{36}{9}$ (mod. 7).

XI. — Pour un même module, un congru du dividende est le congru du produit du diviseur par celui du quotient plus le congru du reste.

Exemple : Soit le dividende 40369757 et le diviseur 923; le quotient est 4373 et le reste 696; d'où $4036975 = 923 \times 4373 + 696$.

On a $4036975 \equiv 7$ (mod. 9), car 7 est le reste de la division de 4036975 par 9; de même $923 \equiv 5$ (mod. 9); $4373 \equiv 8$ (mod. 9) et $696 \equiv 3$ (mod. 9); donc $923 \times 4373 \equiv 5 \times 8$ (mod. 9) et $923 \times 4373 + 696 \equiv 5 \times 8 + 3 \equiv 7$ mod. 9); c'est aussi le congru du dividende.

—

Digitized by Google

APPLICATION. — *Preuves des six opérations fondamentales* (1).

La théorie des congruences permet d'établir des règles faciles pour la preuve des opérations de calcul ; il convient de prendre un module qui permet de calculer facilement le reste qu'on obtient en divisant un nombre par le module ; c'est pour ce motif qu'on prend ordinairement pour module les nombres 9 ou 11. On pourrait employer les nombres 37 et 101.

On sait que $10 = 9 + 1$ d'où $10 \equiv 1$ (mod. 9); donc aussi toute puissance de 10 est congrue à 1 pour le module 9; et d'une manière plus générale une collection d'une unité décimale d'ordre quelconque est congrue à la valeur du chiffre significatif de cette collection pour le module 9 ; conséquemment *tout nombre est congru à la somme de ses chiffres significatifs pour le module 9.*

On démontrerait de la même manière que si l'on partage un nombre en tranches de 2 chiffres en commençant par la droite *le nombre est congru à la somme des tranches pour le module 11.*

Nous montrons ci-après la méthode à suivre pour la preuve des opérations par ces modules (2).

I. — *Addition.*

$$\left.\begin{array}{r} 58937 \equiv 5 \\ 22058 \equiv 8 \\ 95634 \equiv 0 \\ 8930 \equiv 2 \\ 5821 \equiv 7 \\ 34920 \equiv 0 \\ \hline 226300 \equiv 4 \end{array}\right\} \text{Mod. } 9 \qquad \left.\begin{array}{r} 58937 \equiv 10 \\ 22058 \equiv 3 \\ 95634 \equiv 0 \\ 8930 \equiv 9 \\ 5821 \equiv 2 \\ 34920 \equiv 6 \\ \hline 226300 \equiv 8 \end{array}\right\} \text{Mod. } 11$$

Preuve : $4 = 4$ Preuve : $8 = 8$

La marche suivie est assez simple pour qu'il ne soit pas nécessaire d'y ajouter des explications.

(1) On trouvera une exposition fort approfondie des méthodes de preuve pour toute espèce de formules dans J. VAN LOCHEM, *Leerwijze ter vermijding en opsporing van rekenfouten* (1836) On consultera aussi avec fruit l'ouvrage publié à Paris, la même année, par M. Aug. BOUCHÉ, puis, une note de M. KÖNIG de Berlin, (CRA t. XXXVII, p. 546) qui propose d'appliquer une méthode déduite aussi de la théorie des congruences.

(2) Remarquons que si dans une multiplication on reculait les chiffres de 2 rangs vers la gauche, les preuves, par 9 et 11 réussiraient et ne seraient plus une garantie d'exactitude; si l'on reculait les chiffres d'un rang seulement, la preuve par 9 serait encore en défaut, mais celle par 11 ferait découvrir l'erreur.

Digitized by Google

II. — *Soustraction.*

$$\left.\begin{array}{r} 502145 \equiv 8 \\ 428928 \equiv 6 \\ \hline 73217 \equiv 2 \end{array}\right\} \text{Mod. } 9 \qquad \left.\begin{array}{r} 502145 \equiv 6 \\ 428928 \equiv 5 \\ \hline 73217 \equiv 1 \end{array}\right\} \text{Mod. } 11$$

Preuve : $2 = 2$ Preuve : $1 = 1$

III. — *Multiplication.*

Mod. 9

$$\begin{array}{r} 53034 \equiv 6 \\ 4305 \equiv 3 \\ \hline 265170 \\ 159102 \\ 212136 \\ \hline 228311370 \equiv 0 \end{array}$$

Preuve : $0 \equiv 6 \times 3$

Mod. 11

$$\begin{array}{r} 5'30'34 \equiv 3 \\ 43'05 \equiv 4 \\ \hline 2'28'31'13'70 \equiv 1 \end{array}$$

Preuve : $1 \equiv 3 \times 4$

Afin de pouvoir trouver immédiatement la faute, s'il y en a une, on peut opérer comme suit :

Mod. 9

		Détails des calculs
$53034 \equiv 6$		
$4305 \equiv 3$		
$265170 \equiv 3$	$5 \times 6 \equiv 3$	$5 \times 53034 = 265170 \equiv 3$; $5 \times 6 \equiv 3$
$159102 \equiv 0$	$3 \times 6 \equiv 0$	$3 \times 53034 = 159102 \equiv 0$; $3 \times 6 \equiv 0$
$212136 \equiv 6$	$4 \times 6 \equiv 6$	$4 \times 53034 = 212136 \equiv 6$; $4 \times 6 \equiv 6$
$228311370 \equiv 0$	$6 \times 3 \equiv 0$	$4305 \times 53034 = 228311370 \equiv 0$; $3 \times 6 \equiv 0$

La preuve par 11 se ferait de la même manière.

IV. — *Élévation au carré.*

$73406 \equiv 2$	
$73406 \equiv 2$	
$440436 \equiv 3$	$2 \times 6 \equiv 3$
$293624 \equiv 8$	$2 \times 4 \equiv 8$
$220218 \equiv 6$	$2 \times 3 \equiv 6$
$513842 \equiv 5$	$2 \times 7 \equiv 5$
$5388440836 \equiv 4$	$2 \times 2 \equiv 4$

Preuve : $4 \equiv 2 \times 2$

La marche à suivre est la même que pour la multiplication.

Digitized by Google

V. — *Division.*

Mod. 9

```
4036975 ≡ 7 | 923 ≡ 5
3692        |-------
 3449       | 4373 ≡ 8
 2769
  6807
  6461
   3465
   2769
    696 ≡ 3
```

Preuve : $7 \equiv 5 \times 8 + 3$

Mod. 11

```
4/03/69/75 ≡  8
       923 ≡ 10
      4373 ≡  6
       696 ≡  3
```

Preuve : $8 \equiv 10 \times 6 + 3$

On peut aussi vérifier chaque opération à part; on opère alors comme suit :

Mod. 9

```
          4036975 ≡ 7 | 923 ≡ 5
          3692        |-------
4 ≡ 4      3449       | 4373 ≡ 8
           2769
4 ≡ 4       6807
            6461
2 ≡ 2        3465
             2769
7 ≡ 7         696 ≡ 3
```

Détails de la preuve.

$4 \times 923 + 344 = 4036$ ou $4 \times 5 + 2 \equiv 4$

$43 \times 923 + 680 = 40369$ ou $7 \times 5 + 5 \equiv 4$

$437 \times 923 + 346 = 403697$ ou $5 \times 5 + 4 \equiv 2$

$4373 \times 923 + 696 = 4036975$ ou $8 \times 5 + 3 \equiv 7$

VI. — *Extraction de la racine carrée.*

```
√94/53/07/61 ≡ 8 | 9722 ≡ 2
   81            |-------
4 ≡ 4 135/3      | 187
      1309       | 1942
3 ≡ 3  440/7    | 19442
       3884
1 ≡ 1   5236/1
        38884
8 ≡ 8    13477 ≡ 4
```

Preuve : $8 \equiv 2^2 + 4$

Détails de la preuve, quand on veut vérifier chaque opération partielle :

$9^2 + 13 = 94$; $4 \equiv 4$

$97^2 + 44 = 9453$; 4 (1) $+ 8 \equiv 3$

$972^2 + 523 = 945307$; $0 + 1 \equiv 1$

$9722^2 + 13477 = 94530761$; $4 + 4 \equiv 8$

(1) $97 \equiv 7$ et $97^2 \equiv 7 \equiv 4$.

Digitized by Google

APPENDICE IV

UNITÉS EMPLOYÉES POUR LES MESURAGES.

CHAPITRE I

Système métrique et décimal des poids et mesures.

Le système *métrique* se compose de l'ensemble des unités qui servent à mesurer les grandeurs et qui sont basées sur le *mètre;* c'est un *système décimal* parce que les multiples et les sous-multiples des unités principales sont formés d'après la loi décimale, enfin en Belgique, en France et en d'autres pays encore c'est le *système légal des poids et mesures* parce que la loi prescrit et règle ces unités.

Les unités fondamentales sont :

1° Pour les *longueurs :* la dix-millionième partie du quart du méridien de Paris (1) ; on l'appelle le *mètre.*

2° Pour les *surfaces ordinaires :* la surface d'un carré dont chacun des côtés a un mètre de long ; on l'appelle le *mètre carré.*

3° Pour les *surfaces agraires :* la surface d'un carré dont chacun des côtés a dix mètres de long ; on l'appelle l'*are.*

4° Pour les *solides ordinaires* (maçonnerie, bois de charpente, etc.) : le volume d'un cube dont chacune des arêtes a un mètre de long ; on l'appelle le *mètre cube.*

5° Pour le *bois de chauffage :* le mètre cube qui prend alors le nom de *stère.*

6° Pour les *liquides :* la capacité d'un cube dont chaque arête a un dixième de mètre de longueur ; on l'appelle le *litre.*

7° Pour les *poids :* le poids dans le vide de la quantité d'eau distillée qui, à la température de sa plus grande densité (environ 4° centigrades), peut être contenue dans un petit cube dont chaque arête a un centième de mètre de longueur ; on l'appelle le *gramme* (2).

---

(1) En réalité, le mètre est la longueur, à la température de la glace fondante, de la règle en platine déposée aux archives de Paris, le 22 juin 1799. D'après M. Faye, la circonférence de l'équateur est de 40076625 mètres, et la longueur moyenne du méridien à 40008032 mètres.

(2) On a pris de l'eau parce que c'est une des matières les plus homogènes;

Digitized by Google

3° Pour les *monnaies :* la valeur d'une pièce qui pèse *cinq grammes* et dont le poids comprend 9 parties d'argent et 1 partie de cuivre (1); on l'appelle le *franc*.

On emploie aussi des unités auxiliaires pour n'avoir pas à opérer sur des nombres trop grands ou trop petits; elles sont toutes des multiples ou des sous-multiples décimaux des unités principales. Pour nommer les multiples, on place devant le nom de l'unité principale les mots suivants tirés du grec :

déca	remplace	10
hecto	»	100
kilo	»	1000
myria	»	10000

Pour nommer les sous-multiples on met devant le nom de l'unité principale les mots suivants tirés du latin :

déci	remplace	0.1
centi	»	0.01
milli	»	0.001

Voici quelques particularités des mesures qui sont en usage.

I. — LONGUEURS

Le mètre est employé pour mesurer la longueur des étoffes, des planches, etc.; il est alors représenté par une règle de bois dur, munie aux extrémités de petites plaques de cuivre; cette règle est divisée en décimètres, à côté desquels se trouvent les nombres 10, 20, 30..... 100 qui désignent autant de centimètres; le premier décimètre est ordinairement divisé en centimètres; le premier centimètre en millimètres; c'est sous cette forme seulement que l'agent du gouvernement accepte de contrôler le mètre (2).

---

on emploie de l'eau distillée afin qu'elle ne contienne pas de matières étrangères qui feraient varier le poids; on a dû indiquer une température parce que le poids varie avec cet élément; et l'on a choisi la température à laquelle l'eau est la plus pesante; enfin on pèse l'eau dans le vide, parce qu'un corps pesé dans l'air perd une partie de son poids égal à celui qui est occupé par le corps.

(1) D'après la loi du 21 juillet 1866, les pièces de 5 francs sont seules au titre de 0.900; les autres monnaies d'argent ne sont qu'au titre de 0 835.

(2) Les étalons du mètre et du kilogramme sont renfermés en Belgique dans un coffre de fer fermé par trois serrures; l'une des clefs est confiée au président du Sénat, l'autre au président de la chambre des représentants et la troisième au ministre des finances. (Loi du 4 mai 1848.)

Digitized by Google

Quand la longueur à mesurer est assez petite, comme cela arrive pour les lignes d'un dessin, on se sert du *double décimètre* qui est en bois ou en ivoire, et qui est partagé en centimètres et en millimètres.

Quand la longueur est assez grande, comme cela arrive pour les lignes sur le terrain, on emploie un ruban qui a ordinairement 10 mètres ou un décamètre de long ; ce ruban est quelquefois remplacé par une chaîne de même longueur qu'on nomme *chaîne d'arpenteur* ou *chaîne métrique* (1).

Le décamètre est le seul multiple du mètre qui existe réellement. L'hectomètre est peu au point employé. Le kilomètre est indiqué le long des routes empierrées et des voies de chemins de fer par des bornes sur lesquelles on a marqué des nombres pour faire connaître la distance jusqu'à un point donné (2) ; ce sont les *bornes kilométriques* ou *milliaires*. Le myriamètre est employé pour le mesurage des grandes distances géodésiques. On a aussi la *lieue* qui fait 5 kilomètres (3) ; on l'appelle quelquefois *heure*, parce qu'on emploie une heure environ pour parcourir cette longueur, quand on marche d'un pas régulier et ordinaire. Dans les sciences naturelles le *micron* signifie le millième du millimètre.

II. — SURFACES.

Les multiples du mètre carré sont : le *décamètre carré*, l'*hectomètre carré*, etc. ; ce sont des carrés dont chaque côté à 10, 100... mètres de long ; mais ces multiples sont rarement employés ; le mètre carré est subdivisé en 100 parties égales dont chacune est un *décimètre carré*, c'est-à-dire la superficie d'un carré dont chaque côté a un décimètre de long ; le décimètre carré vaut à son tour *cent centimètres carrés* et le centimètre carré cent millimètres carrés ; de sorte que chaque subdivision du mètre carré vaut 100 des subdivisions qui suivent immédiatement ; la loi est *centésimale*.

---

(1) Dans la mesure des longueurs sur le terrain au moyen de la chaîne d'arpenteur, les inégalités du sol font perdre, en général, 2 centimètres par décamètre.

(2) L'empereur romain Auguste fit élever au milieu de Rome une colonne, appelée *milliaire doré*, d'où l'on commençait à compter les milles pour tous les grands chemins de l'empire.

(3) En France la lieue est de 4 kilomètres ; en Angleterre elle vaut 3 milles donc 3 fois 1609 m. ou 4827 mètres environ ; la *lieue marine* ou géographique de 20 au degré de l'équateur est de 5,566 mètres ; la lieue Suisse est de 4,800 mètres ; le mille d'Allemagne vaut 7532 mètres et celui d'Autriche 7587 mètres ; la verste russe vaut 1067 mètres. La *brasse* vaut 1,60 m.

Digitized by Google

Pour l'évaluations des terrains on prend pour unité l'*are;* il comprend 100 mètres carrés: le seul multiple de l'are est l'*hectare* ou *bonnier* carré en hollande (1); il vaut 100 ares ou 100 fois 100 ou 10,000 mètres carrés; c'est la superficie d'un carré dont chaque côté à 100 m de long. La seule subdivision de l'are est le *centiare;* c'est la centième partie de l'are donc la superficie d'un mètre carré (2).

III. — VOLUMES OU CAPACITÉS

On n'emploie aucun multiple du mètre cube; il y a trois sous-multiples et chacun d'eux contient mille des subdivisions qui le suivent immédiatement. ils se forment donc d'après la loi *millénaire;* ce sont le décimètre cube, le centimètre cube et le millimètre cube qui ont respectivement la capacité d'un cube dont chaque arête a un décimètre, un centimètre, un millimètre de long.

Le stère, qui est l'unité de volume pour le bois de chauffage, se compose d'un châssis formé de 3 pièces de bois assemblées; la 1re est couchée sur le sol, c'est la *sole;* les deux autres s'élèvent sur la 1re à la distance d'un mètre: la hauteur de ces pièces est aussi d'un mètre. Les pièces de bois de chauffage qui sont placées entre les montants ont un mètre de long et, lorsque le châssis est rempli, on a un mètre cube. On emploie aussi pour le bois de chauffage le *décastère* (10 stères) et le *décistère* (0.1 de stère).

Le litre est la millième partie du mètre cube ou le décimètre cube; les multiples du litre sont: le *décalitre* (10 litres) et l'*hectolitre* (100 litres); le *kilolitre* (1000 litres), qu'on n'emploie pas, aurait la capacité du mètre cube. Les subdivisions du litre sont le *décilitre* (0.1 de litre), le *centilitre* (0.01 de litre) et le *millilitre* (0.001 de litre); ce dernier a la capacité du centimètre cube.

Toutes ces mesures ont la forme cylindrique parce que celle-ci est plus commode, moins coûteuse et surtout plus solide que la forme du cube;

---

(1) L'Académie française écrit bonier, mais l'usage en Belgique est d'écrire bonnier; Littré écrit aussi bonnier.

(2) Les notaires emploient aussi le déciare (0,1 d'un are). Dans certaines contrées on emploie encore les dénominations de *perche carrée* pour are et d'*arpent* pour hectare.

Digitized by Google

pour les liquides ces cylindres ont pour la plupart une hauteur égale au double du diamètre; pour les matières sèches la hauteur est égale au diamètre.

IV. — POIDS.

Les multiples du gramme sont : le *décagramme* (10 grammes), l'*hectogramme* (100 gr.) et le *kilogramme* (1,000 gr.); quand les objets à peser sont très lourds on les pèse au moyen du *quintal métrique* (100 kilogr.), du *millier métrique* ou *tonneau de mer* ou simplement *tonne* (1000 kg.); la tonne a le poids d'un mètre cube d'eau distillée.

Les sous-multiples sont le *décigramme* (0.1 de g.), le centigramme (0.01 de g.) et le milligramme (0 001 de g.); ce dernier est le poids d'un millimètre cube d'eau distillée.

On construit dans notre pays, en *fonte de fer :* des poids d'un demi-hg., d'un hg., d'un double hg, d'un demi-hg, d'un kg., d'un double kg., de 5 kg., de 10 kg., de 20 kg., et de 50 kg. On leur donne la forme de pyramides hexagonales tronquées surmontées d'un anneau pour les soulever.

On construit en cuivre les poids de un gramme, 2 g., 5 g, 10 g, 20 g., 50 g., 100 g., ou un hg., 2 hg, 5 hg., et un kg.; ces poids ont la forme d'un cylindre surmonté d'un bouton pour les saisir. Pour les objets très légers, comme les matières d'or et d'argent, dans les manipulations chimiques, dans les recherches de la physique et dans les pharmacies, on emploie les subdivisions du gramme que l'on construit en laiton avec leurs doubles et leurs moitiés; on leur donne la forme de petites plaques carrées et minces, dont l'un des angles est recourbé pour pouvoir les saisir à la pincette.

V. — MONNAIES.

Les multiples du franc ne sont pas décimaux et portent le nom de leur valeur; les sous-multiples décimaux sont : le *décime* (0.1 du fr.) et le centime (0.01 du fr.).

Pour diminuer le *frai* ou usure des monnaies par le frottement (1) et pour rendre plus facile la préparation de la monnaie d'or, on allie le métal fin d'un peu de cuivre.

---

(1) Pour les pièces de *vingt* francs, en or, le frai atteint presque un milligramme par an

Digitized by Google

On distingue les monnaies en *principales* ou *courantes* et *auxiliaires*, *divisionnaires*, ou *d'appoint*.

Les monnaies principales ont la valeur du métal, or ou argent, qu'elles contiennent. En les monnayant on pèse et on titre le métal sous le contrôle de l'État (1), mais on n'ajoute ni ne retranche rien à leur valeur propre ; aussi la *frappe de ces monnaies* est libre dans la plupart des pays, c'est-à-dire que toute personne a le droit de porter aux hôtels des monnaies des lingots pour en obtenir des monnaies principales, soit gratuitement, comme en Angleterre (2), soit moyennant une taxe légère.

Les monnaies auxiliaires ont une valeur intrinsèque inférieure à leur valeur nominale et ne peuvent pas être livrées à la fabrication libre ; c'est l'État qui s'en réserve le monopole.

On appelle *étalon monétaire* le métal, or ou argent avec lequel sont fabriquées les monnaies principales.

L'Angleterre, le Portugal, le Brésil, l'Allemagne, les États Scandinaves, les Pays-Bas, le Japon, etc , ont l'étalon unique d'or. La Russie et l'Empire indien ont l'étalon unique d'argent. La France, la Belgique, l'Italie, la Suisse, la Grèce, l'Espagne, l'Autriche, la Roumanie, la Serbie, les États-Unis d'Amérique la Colombie, le Vénézuéla, le Pérou, etc., ont le régime du double étalon.

On appelle *monométallisme* le système de l'étalon unique, or ou argent, et *bimétallisme* le système du double étalon. Il est certain qu'il arrivera un temps où l'on adoptera partout, comme seul étalon, l'or qui se recommande par des qualités physiques et chimiques.

La France, la Belgique, l'Italie, la Suisse et la Grèce ont conclu, le 23 décembre 1865, une convention monétaire, dite de l'*Union latine*, renouvelée le 5 novembre 1878, puis le 6 novembre 1885, sur les bases suivantes :

1° L'unité principale de monnaie est le *franc*, monnaie d'argent du poids de cinq grammes, au titre de neuf dixièmes (3) ;

---

(1) L'État prélève, pour couvrir ses frais de fabrication, un droitde 6 70 fr. par kg. d'or et de 1,50 fr. par kg. d'argent au titre de 0 900 qu'il transforme en monnaie. On trouve ainsi que un kg. d'argent pur vaut 220.56 fr. ; que la valeur intrinsèque d'un kg. de monnaie d'or est de 3093,30 fr., enfin que le kg. d'or pur vaut 3437 fr.

(2) A la Banque d'Angleterre, si quelqu'un présente un souverain d'or qui n'a plus le poids requis, on coupe la pièce en deux et on lui en rend les morceaux.

(3) Cette définition est celle des lois décrétées en France en 1795 et 1803.

Digitized by Google

2° L'or monnayé vaut, à poids égal et à titre égal, quinze fois et demie (1) autant que l'argent;

3° Les monnaies principales sont les pièces d'argent de 5 fr. au titre de 0.9 et les pièces d'or de 5 fr. de 10 fr., de 20 fr., de 50 fr., et de 100 fr., aussi au titre de 0.9.

La frappe de ces monnaies est libre, sauf une retenue de 1.75 fr. pour frais de fabrication par kgr. d'argent au titre de 0.9 et de 6,70 fr par kgr. d'or au même titre. Toutefois, par suite de la dépréciation de l'argent, l'union a dû limiter en 1873, et même suspendre entièrement en 1876, la frappe des pièces d'argent de 5 fr. ;

4° Les monnaies divisionnaires sont les pièces d'argent de 0.20 fr., de 0 50 fr., de 1 fr. et de 2 fr. au titre de 0.835 (2);

5° Quant à la monnaie de cuivre ou de billon, chaque État conserve son système particulier.

En Belgique, il y a des pièces de nickel de 10 centimes et de 5 cent. renfermant 3 parties de cuivre et 1 de nickel, et des pièces de cuivre de 2 cent. et de 1 cent. renfermant soit du cuivre pur, soit 1 partie de cuivre et 2 d'alliage. D'après la loi du 20 décembre 1860, ces pièces qui ont une valeur nominale de 2 à 3 fois supérieure à leur valeur intrinsèque, n'ont cours obligatoire, entre les particuliers, que jusqu'à concurrence de *cinq* fr. en nickel ou de *deux* fr. en cuivre pour chaque payement.

En France, il y a des pièces de bronze de 10 centimes, de 5 centimes, de 2 centimes et de un centime. Ces pièces pèsent autant de grammes qu'elles valent de centimes; elles renferment 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc. Ces monnaies, qui ont une valeur nominale environ *quatre* fois supérieure à leur valeur intrinsèque, n'ont cours obligatoire, entre les particuliers, que pour l'appoint de la pièce de cinq francs. (Décret du 18 août 1810.)

Le tableau suivant indique les poids, titres et diamètres des monnaies d'or et d'argent de l'union latine.

---

(1) Ce rapport résulte d'une loi promulguée en France en 1803; il est assez curieux de remarquer qu'on a pu vérifier qu'il existait déjà, depuis la plus haute antiquité, un rapport constant entre la valeur des deux métaux; c'est ainsi que le rapport de l'or et de l'argent était d'un à douze et demie en Égypte, comme l'a établi le Dr Brugsch; d'un à treize et un tiers à Babylone et dans tous les pays qui avaient adopté le système babylonien, ainsi que l'a montré le Dr Brandès.

(2) La pièce d'argent d'un franc n'est donc pas le franc unité de monnaie; celui-ci n'existe que dans la pièce de 5 fr.

Digitized by Google

NATURE des PIÈCES		TITRE		POIDS		DIAMÈTRE ou MODULE
		TITRE DROIT	TOLÉRANCE	POIDS DROIT	TOLÉRANCE (1)	
		millièmes	millièmes	grammes	millièmes	millimètres
Or	100 fr.	900	1	32 25806	1	35
	50 »	900	1	16.12903	1	28
	20 »	9 0	1	9.45161	2 2)	21
	10 »	900	1	3 22580	2	19
	5 » (3)	900	1	1 61290	3	17
Argent	5 »	900	2	25	3	37
	2 »	835 (4)	3	10	5	27
	1 »	835	3	5	5	23
	0.50	835	3	25	7	18

VI. — REMARQUES GÉNÉRALES

1° On remarquera que kilo, hecto..., deci, centi et milli, conservent leur sens naturel chaque fois que l'unité à laquelle ils sont ajoutés est énoncée par un seul mot. Par exemple : un décimètre est le dixième d'un mètre ; mais un décimètre cube (en deux mots) n'est pas le dixième mais bien le millième d'un mètre cube.

2° Notre système légal des poids et mesures présente de grands avantages car il est uniforme et simple ; puis il est invariable ; enfin on peut lui appliquer le calcul des nombres décimaux.

(1) La loi laisse, soit pour le poids, soit pour le titre, une latitude pour les erreurs en plus ou en moins dite *tolérance*. Les pièces doivent être retirées de la circulation, sans perte pour les détenteurs, quand leurs empreintes ont disparu, ou que leur poids a été réduit par le frai de 3 p. c. au-dessous de la tolérance.

(2) La tolérance de poids pour la pièce de 20 fr. étant de 0.002 et le frai pouvant monter jusqu'à $\frac{1}{2}$ p. c. au dessous de la tolérance, on voit que la perte totale de poids peut s'élever à 0.002 + (1 − 0.002) × 0.005 = 0,00699

Comme le frai moyen annuel de la pièce de 20 fr. est d'environ 0.0002, la durée moyenne de la circulation légale de cette pièce est donc de 0,00699 : 0.0002 = 35 ans.

(3) La fabrication des pièces de 5 fr. en or est légalement suspendue en France.

(4) En France les pièces d'argent au titre de 0,835 se composent de 835 parties d'argent, 93 de cuivre est 72 de zinc. Cet alliage présente l'avantage d'être plus blanc que l'alliage au cuivre pur, et ne peut pas être noirci par les émanations sulfureuses.

Digitized by Google

3° Les abréviations suivantes pour les mesures métriques ont été adoptées par le *comité international des poids et mesures :*

LONGUEURS	SURFACES	VOLUMES	CAPACITÉS	POIDS
Kilomètre, *km*	Kilomètre carré, km^2	Mètre cube, m^3	Hectolitre, *hl*	Tonne, *t*
Mètre, *m*.	Hectare, *ha*	Stère, *S*	Décalitre, *dcl*	Quintal, *q*
Décimètre, *dm*	Are, *a*	Décimètre cube, dm^3	Litre, *l*	Kilogramme, *kg*
Centimètre, *cm*	Mètre carré, m^2	Centimètre cube, cm^3	Décilitre, *dcl*	Gramme, *g*
Millimètre, *mm*	Décimètre carre, dm^2	Millimètre cube, mm^3	Centilitre, *cl*	Décigram^{me}, *dg*
Micron, μ	Centimètre carré, cm^2		Millilitre, *ml*	Centigram^{me}, *cg*
	Millimètre carré, mm^2		Microlitre, λ	Milligram^{me}, *mg*

CHAPITRE II

Mesures anciennement employées dans notre pays.

Un très grand nombre de mesures étaient employées autrefois dans notre pays. Nous passerons sommairement en revue les principales d'entre elles. Leur usage exigeait l'emploi du calcul des nombres complexes (1).

I. — LONGUEURS.

L'unité principale était la *toise* (2); elle était divisée en 6 *pieds* Le pied était divisé en 10 *pouces* et le pouce en 10 *lignes* (provinces de Liège, Linbourg, Namur, Luxembourg, Hainaut; à Gand, Louvain, Nivelles, etc.). Quelquefois le pied valait 11 pouces et le pouce 11 lignes (à Anvers, Bruges, Malines); ou bien le pouce valait 8 lignes (à Bruxelles); ou bien le pouce valait 12 lignes et la ligne 12 *points* (à Tournai).

(1) On trouvera un tableau très complet de nos anciennes mesures dans les *Mesures anciennes de Belgique*, de l'abbé E. Gelin.

(2) On a trouvé que le quart du méridien mesuré par les astronomes français a une longueur de 5130780 toises françaises; il en résulte que la toise française valait 1949 mètres. La *brasse* vaut 1624 m.; le *nœud* 15422 m.; *l'encablure nouvelle* est de 200 m.

Digitized by Google

Le pied valait de 274 millimètres (Bruges) à 297 mm. (Courtrai et Tournai) (1).

Pour mesurer les étoffes on se servait de l'*aune* qui était divisée en 16 *tailles*. L'aune de Brabant valait 695 mm , celle de Liège 663 mm., et celle de Bruges et de Gand 700 mm. (2).

II. — SURFACES AGRAIRES.

L'unité principale était le *bonnier;* il valait 400 *verges* à Alost, Anvers, Bruxelles, Louvain, Malines, Namur, Nivelles, Termonde, etc.; il valait 4 *journeaux* ou 20 *verges grandes* ou 400 *verges petites* à Liège, Hasselt, Tongres, etc., il valait 4 journeaux ou 400 verges grandes ou 1600 verges petites à Tournai et à Courtrai; il valait 9 *arpents* ou 900 verges carrées à Gand et dans le pays de Waas. La verge variait de 0.14 are Bruges) à 0.34 are (Alost et Anvers).

III. — VOLUMES ET CAPACITÉS

1° *Liquides.* — L'unité principale était l'*aime* ou la *tonne*. A Anvers l'aime (contenait 50 *stoops*, le stoop 2 *pots*, le pot 2 *pintes* et la pinte 2 *chopines;* à Bruxelles l'aime contenait 24 *schreefs* ou marques, le schreef 2 *geltes* ou lots, le gelte 2 pots, le pot 2 pintes et la pinte 2 chopines, enfin la chopines 16 onces. L'aime pour la bière contenait 50 stoops, le stoop 2 pots, le pot 2 pintes, la pinte 8 verres; à Liège l'aime valait 1 ½ tonne, la tonne 90 pots, le pot 2 pintes, la pinte 2 chopines, la chopine 4 *mesurettes;* à Bruges et à Gand le stoop contenait 2 pots, le pot deux pintes, la pinte 2 baquets; pour mesurer l'huile on se servait à Gand du *sister* d'une contenance de 46.13 litres.

Le pot variait de 1.153 litre (Gand) à 2 406 (Tournai .

2° *Matières sèches.* — L'unité principale était le *muid*. A Bruxelles le muid = 6 *razières* = 12 *halsters* ou *boisseaux;* à Liège le muid = 8 *seliers* = 32 *quartes* = 128 *pognoux* = 512 *mesurettes;* à Louvain le muid = 8 halsters = 16 *molevaten;* à Gand le muid = 6 sacs = 12

(1) Il paraît que le pied du roi français (0.324 m) et plusieurs des pieds en usage en Allemagne ont été comme celui de la Chine, importés de l'antique Chaldée et de l'Indo-Perse.

(2) Un exemple de la diversité des mesures anciennes: à Gand l'aune servant à mesurer les toiles écrues était de 765 mm., celle pour les toiles blanches de 728 mm., enfin l'aune mercière de 698 mm.,

Digitized by Google

halsters = 24 mesures; à Courtrai le *sac* = 6 vaten au havots = 24 pintes; à Anvers on employait le *viertel* = 3 *meukes* = 56 pots = 112 pintes = 224 *upers;* à Bruges le *hoed* = 4 mesures = 16 quartes; dans le Luxembourg le *maldre* = 2 sacs ou 10 bichets = 120 pots = 240 pintes = 480 chopines.

Le muid allait de 292 litres (Bruxelles) à 693 (Gand). La rasière de Tournai était de 116 litres. Le maldre de Luxembourg de 30 litres environ, etc. (Note XXXIII.)

IV. — POIDS.

L'unité fondamentale était la *livre*. Il y avait trois espèces particulières de livres: 1° la *livre de commerce* pour les denrées ordinaires; elle valait 16 onces, l'once 4 sixains; 2° *la livre poids de marc pour l'orfèvrerie;* elle valait 2 marcs ou 16 onces; 3° *la livre pour les pharmaciens* qui se divisait en 12 onces = 96 drachmes = 288 scrupules = 5760 grains

La livre variait de 431 grammes (Courtrai) à 493 gr. (Luxembourg).

V. — MONNAIES.

Les principales monnaies étaient les suivantes :

Le *florin des Pays-Bas* = 100 cents, il valait 2.12 fr.; le *florin de Brabant* = 20 sous ou 3 schellings = 80 liards = 240 deniers; il valait 1.81 fr.; le *ducat* valait 11.42 fr.; le *florin de Liège* = 20 *patars* = 80 *liards* = 1,920 *saz;* il valait 1.18 fr.; le *florin de Luxembourg* = 20 sous = 160 liards; il valait 1.65 fr ; la *livre de Hainaut* (1) = 20 sous = 8 liards ou 240 derniers; elle valait 0.91 fr.; la *livre de gros* = 20 sous ou *escalins* = 240 deniers; elle valait 12.70 fr.

Un nouveau système monétaire fut établi dans les Pays-Bas en 1816; les monnaies d'argent étaient le *florin* contenant 200 *aas* (9.612 gr.) d'argent fin au titre de 0.893; le florin était divisé en 100 cents, il valait 2.12 fr.; il y avait ensuite la pièce de 3 florins, le demi, le quart, le dixième et le vingtième du florin; au dessous du demi-florin le titre n'était plus que 0.569. Les pièces de cuivre étaient le *cent* et le demi-cent; poids 80 aas (3,845 gr.).

---

(1) L'ancienne unité de la France était la *livre tournoy* = 20 sous = 240 deniers. La loi du 23 germinal an IV (14 avril 1796) a fixé la valeur de la pièce de 5 fr. à 5 livres 1 sou 3 deniers ou $\frac{5}{16}$ de livre; la valeur du franc est donc $\frac{80}{81}$ de livre, de sorte que la livre tournoy valait environ 0.876 fr.

Digitized by Google

Les monnaies à l'usage du commerce étaient et restaient :

La *livre de gros* (6 florins des Pays-Bas ou 7 de Brabant), valeur 12.70 fr. ;
Le *ducat d'argent* au poids de 18 esterlins (28,078 gr.) » 6.30 fr. ;
Le *rijder d'argent* » » » 21 » (32,574 gr.) » 7.35 fr. ;
Le *ducat d'or* » » » 2 » (3.494 gr) ;
Le *double souverain* en or) valait 33.82 fr. ;
La *couronne* (en argent) » 5.80 fr. ;
La *plakette* » » 0.30 fr. ;
L'*escalin* » » 0.60 fr. ;

Les monnaies suivantes étaient aussi en circulation :

En or. — Le louis d'or de 23.55 fr. ; la guinée d'Angleterre valant 24.16 fr. ; la croix de Malte de 27.66 fr. ; le mirliton de 18.14 fr. ; le vertugadin de 23.02 fr. ; la pistole de 19.04 fr.

En argent. — Le ducaton de 6.30 fr. ; le Rijder d'or de Hollande de 28.44 fr. ; l'écu de trois couronnes de 5.89 fr. ; le petit écu de Navarre de 4,70 fr. ; l'écu à palme de 5.89 fr. ; l'écu aux doubles L. L. de 4.52 fr. ; le double carambol de 6.70 fr. (1).

CHAPITRE III

Quelques mesures étrangères.

§ I. — MESURES HOLLANDAISES.

D'après la loi du 7 avril 1869 qui a été mise en vigueur en 1870, le mètre et le kilogramme qui ont été déposés, en 1799, dans les archives de l'État français, sont les types fondamentaux des poids et mesures néerlandais ; tout le système qui est adopté en Belgique est donc aussi en usage en Hollande.

Par la loi du 26 novembre 1847, la Hollande avait adopté l'étalon simple d'argent, et l'unité monétaire était le florin d'argent du poids de 10 grammes au titre de 0.945 ; en 1874 elle suspendit la frappe de l'argent ; enfin par la loi du 6 juin 1875 elle adopta l'étalon unique d'or.

Les monnaies hollandaises sont les suivantes :

(1) On trouvera des détails utiles sur les mesures anciennes dans le dictionnaire de Montferrier (article mesure).

Digitized by Google

En or (au titre de 0.900). La pièce de 10 florins pesant 6,720 gr. (valeur 21.16 fr.).

En argent (au titre de 0 945). Le rixdaler = 2 ½ florins pesant 25 gr. (valeur 5.24 fr.); le florin pesant 10 gr. (valeur 2.10 fr.) et le demi-florin.

Les monnaies d'appoint (au titre de 0 640) sont le petit quart = 25 cents pesant 3,575 gr. le petit double = 10 cents pesant 1,400 gr. et le sou = 5 cents pesant 0.685 gr.

Les monnaies d'appoint de bronze sont la pièce de 2 ½ cents ou demi-sou pesant 4 gr.; le cent = 0.01 de florin pesant 2.5 gr., et le demi-cent; ce bronze est formé de 0.950 de cuivre, 0.040 d'étain et 0.010 de zinc.

Les monnaies de change sont le *double Guillaume* en or valant environ 20 florins; il pèse 13.458 gr. (41.70 fr.), le *Guillaume* en or de 10 florins (20.25 fr.), pesant 6.729 gr., le demi-Guillaume en or, le double ducat en or pesant 6.988 gr. (23.66 fr.), le ducat en or; les 3 pièces sont au titre de 0.900 et les deux dernières au titre de 0.983.

§ II. — MESURES ANGLAISES.

Le système légal des poids et mesures fut décrété en 1824 par un acte du parlement et fut mis en vigueur le 1er janvier 1826 sous le titre de : *Imperial weights and measures*. Il fut établi par acte : 1° qu'un certain *yard* fait en 1760 d'après un ordre du parlement serait dorénavant le *Imperial yard* et l'unité de longueur; et que dans le cas où cet étalon serait perdu ou gâté, on pourrait le retrouver, sachant que la longueur du pendule, oscillant pendant une seconde, dans le vide, à la latitude de Londres et au niveau de la mer, était de 39.13929 *inches* (pouces) ou douzièmes de pied. 2° Que l'unité pour les poids serait l'*Imperial pound Troy* contenant 5,760 grains et la pound (livre) *avoir du pois* contenant 7,000 grains; que dans le cas d'accident on pourrait retrouver la 1re en sachant que un *cubic inch* (pouce cube) d'eau distillée à la température de 62° Fahrenheit pèse 252,458 grains. 3° Que l'unité pour les capacités serait l'*Imperial gallon* de 277,274 cubie inches.

Voici la plupart des mesures anglaises.

I. — LONGUEURS.

4 inches = 1 hand (main); 12 inches = 1 foot (pied); 3 feet = 1 yard = 0,9143838348 mètre; 6 feet = 1 fathom; 5 ½ yards = 1 rod, pole ou perch; 40 poles = 1 furlong; 8 furlongs = 1 mile (mille); 3 miles = 1 league (lieue).

Digitized by Google

Pour les étoffes : 2 ¼ inches = 1 nail; 4 nails = 1 quarter ; 4 quarters = 1 yard ; 5 quarters = 1 ell (aune) = 1.143 mètre environ.

II. — SURFACES.

144 square inches (pouces carrés) = 1 square foot (pied carré) ; 9 square feet = 1 square yard ; 30 ¼ square yards = 1 rod, pole ou perch ; 40 perches = 1 rood ; 4 roods = 1 acre ; 640 acres = 1 square mile.

III. — VOLUMES.

1° *Solidités* — 1,728 cubic inches = 1 cubic foot et 27 cubic feet = 1 cubic yard.

2° *Capacités*. — 4 gills ou noggins = 1 pint (pinte) ; 1 pints = 1 quart ; 2 quarts = 1 pottle (pot) ; 2 pots = 1 gallon = 4.54345797 litres ; 2 gallons = 1 peck ; 4 pecks = 1 bushel (boisseau, environ un hl.) ; 8 bushels = 1 quarter ; 5 quarters = 1 load.

Pour les charbons : 3 bushels = 1 sac ; 12 sacs = 1 chaldron.

Pour la bière : 1 barrel (baril) contient 36 gallons ; 1 hogshead contient 54 gallons.

Pour le vin : 1 hogshead = 63 gallons ; 1 pipe = 2 hogsheads (1)

IV. — POIDS.

1° *Avoir du pois* 2), pour les denrées ordinaires : 16 drams (drachme) = 1 ounce (once) ; 16 ounces = 1 pound (lb, livre) = 453 grammes ; 14 pounds = 1 stone (pierre) ; 28 pounds = 1 quarter ; 4 quarters = 1 hundredweight (cwt, quintal) ; 20 hundredweights = 1 ton (tonneau).

2° *Troy* (3), pour l'orfèvrerie : 24 grains = 1 pennyweight (dwt) ; 20 pennyweights = 1 ounce ; 12 ounces = 1 livre = 373 grammes.

---

(1) Il y a encore une infinité d'autres mesures, pour l'eau de-vie, les matières sèches, etc.

(2) Le nom avoirdupois dérive probablement de l'ancien Normand *avoirs* (denrées) et *pois* (poids).

(3) Les uns prétendent que ce mot vient du nom d'une ville française *Troyes* où il y avait autrefois de grandes foires et où ce poids fut introduit du Caire (en Egypte) vers le temps des croisades ; d'autres supposent que ce mot provient du nom de Londres : *Troynovant* pour *Trinovantum*.

Digitized by Google

3° *Pour la pharmacie* — 20 grains = 1 scruple scrupule) : 3 scruples = 1 dram ; 8 drams = 1 ounce ; 12 ounces = 1 pound = 373 grammes comme la livre troy.

V. — MONNAIES (1).

De compte. — 4 farthings (f.) = 1 penny (d. denier) ; 12 pence = 1 schilling (S.) ; 20 shillings = 1 pound (£, livre) = 25 fr. environ.

Le farthing (2), le demi-penny et les trois quarts du penny sont généralement indiqués par les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, et $\frac{3}{4}$.

Pièces monnayées. — 1° en or : le souverain (3) = 20 shillings ; il pèse 7.981 grammes ; le demi-souverain et la guinée = 21 shillings.

2° en argent : le shilling, le florin = 2 shillings (4) ; la couronne = 5 shillings qui pèse 28.231 gr. et la demi-couronne ; enfin les pièces de six pence, quatre pence et de trois pence.

3° en cuivre : le penny, le demi-penny et le farthing.

La monnaie d'or sur 24 parties contient 22 parties d'or fin et 2 parties d'un alliage d'argent et de cuivre ; avec une lb Troy de ce métal on frappe 46 $\frac{29}{40}$ souverains = 46 £ 1156 d.

La monnaie d'argent sur 40 parties contient 37 parties d'argent fin et 3 de cuivre ; avec une lb Troy de cet alliage on frappe 66 shillings en monnaie d'argent.

Dans les anciens documents on trouve quelquefois les monnaies suivantes : *Groat* = 4 d., *Rester* = 6 d., *Noble* = 6 s. 8 d., *Angel* = 10 s., *Merk* = 13 s. 4 d., *Carolus* = 23 s., *Jacobus* = 25 s. et *Moidore* = 27 s.

L'Angleterre a enfin donné son adhésion à l'adoption du système métrique décimal. Tous les frais arriérés qui lui incombent depuis l'orga-

---

(1) Le système monétaire remonte à 1816. La monnaie d'argent n'a cours libératoire que jusqu'à concurrence de 2 £.

(2) Le farthing est une monnaie seulement employée dans les boutiques où vont s'approvisionner les pauvres ; des milliers d'anglais n'ont jamais vu cette pièce. Il y a encore le *bodle* qui vaut un demi-penny ; c'est une petite pièce traditionnelle, excessivement rare ; son nom provient d'une pièce écossaise, le *bawbee* corruption de *baby* (enfant), parce qu'on y voyait la figure de Jacques, roi d'Ecosse, encore enfant.

(3) La livre sterling, n'est qu'une monnaie de compte qui n'est pas monnayée ; c'est le souverain en or, qui représente la livre sterling.

(4) A été frappée pour la première fois en 1849, et déjà sous le règne d'Édouard III une pièce de cette dénomination, florin ou florence avait été introduite, elle avait pour valeur 6 shillings et demi.

Digitized by Google

nisation de la commission internationale ont été payés et un délégué anglais ira à Paris pour prendre part aux travaux de cette commission. On atteindra ainsi le but si désiré, à savoir : un système uniforme de poids et mesures pour toutes les nations civilisées ; ce système étant celui qui est dérivé du mètre et qui a cours en Belgique, en France et ailleurs à l'exclusion de tout autre.

§ III. — MESURES ALLEMANDES.

La loi du 11 juillet 1884 a fait disparaître quelques irrégularités qui avaient été établies par la loi du 17 août 1868 pour l'application. en Allemagne, du système métrique. En vertu de la nouvelle loi, le mètre est l'unité pour les longueurs et il sert à former les unités carrées et cubiques (1). L'unité pour les poids est le kilogramme. L'unité pour les monnaies est le *marc* d'or à la taille de 2.970 au kgr. d'or fin. La monnaie d'argent n'a cours libératoire que jusqu'à concurrence de 20 marcs.

Les pièces de monnaie sont les suivantes :

En *or*, la pièce de 20 marcs (double couronne), celle de 10 marcs (couronne), celle de 5 marcs, au titre de 0.900.

En *argent*, la pièce de 5 marcs, celle de 2 marcs, celle de 1 marc, (M.) de $\frac{1}{2}$ marc ou 50 deniers (pfenninge); et de $\frac{1}{5}$ de marc au titre de 0.900.

En *nickel*, la pièce de 10 et celle de 5 deniers.

En *cuivre*, la pièce de 2 deniers et celle de un denier.

Anciennement on employait, en Prusse, les mesures suivantes :

L'unité principale pour les longueurs était le *pied du Rhin* de 0.31385 m. ; il était divisé en 12 pouces ; la *toise* valait 6 pieds ; l'*aune* de Prusse était de 67 cm. et celle d'Autriche de 78 cm. L'unité pour les poids était la *livre de Cologne* de 467.7 gr. : elle était subdivisée en 32 *loths* et chaque loth en 4 *drachmes*. Pour les monnaies il y avait le *Thaler* de 60 au kgr. d'argent fin divisé en 60 silbergros de 12 deniers chacun ; en Autriche c'était le florin de 105 au kgr. d'argent fin subdivisé en 60 kreutzers de 4 deniers chacun. (Note XXXIV.)

(1) La *Meile* (lieue) vaut 7408 m. (15 au degré).

—

Digitized by Google

CHAPITRE IV

Unités pour le temps. — Calendrier.

L'unité principale est le *jour :* c'est le temps qu'il faut à la terre pour faire une révolution complète autour de son axe. Le jour vaut 24 heures, l'heure 60 minutes, la minute 60 secondes, etc. (1).

L'*année tropique* est le temps qui s'écoule entre les deux instants consécutifs où l'équateur et le centre du soleil sont dans un même plan : elle se compose de 365.2422166 jours et comme l'*année civile* ne peut pas être composée d'un nombre fractionnaire de jour, on a établi qu'elle serait de 365 jours ; en 4 années il y a une perte de 0.9688664 de jour, donc d'un jour presque tout entier, c'est pourquoi on est convenu de prendre tous les 4 ans une année de 366 jours, c'est ce qu'on appelle l'*année bissextile* (2) ; mais pour faire disparaître l'erreur qu'il y aurait encore, on a établi que la première année de chaque siècle 1700, 1800... . serait considérée comme une *année commune* de 365 jours ; de cette manière il ne peut y avoir qu'une erreur de 1.1336 de jours après 40 siècles.

L'année se divise en 12 mois qui sont : Janvier (31 jours), Février (28 jours et 29 jours pour une année bissextile), Mars (31 jours), Avril (30 jours), Mai (31 jours), Juin (30 jours), Juillet (31 jours), Août (31 jours), Septembre (30 jours), Octobre (31 jours), Novembre (30 jours), Décembre (31 jours).

Ce fut une loi du roi Charles IX, publiée en 1563, qui fit commencer l'année le 1er janvier ; en 1792, la République française tenta une réfor-

---

(1) Les anciens n'ont pas connu la division de l'heure en 60′ et de la minute en 60″ ; on ne trouve cette division en Orient que vers l'an 1000 après Jésus-Christ, et dans la littérature européenne que vers la fin du moyen âge. On avait proposé, lors de l'établissement métrique, d'employer aussi la division décimale pour la mesure des temps et des angles ; l'académie des sciences s'en est occupé en 1870 (C R A) ; récemment encore (1884) la commission française proposa cette réforme au congrès international de Washington ; son vœu fut adopté quasi à l'unanimité. On peut voir, au musée Carnavalet, à Paris, des montres et des horloges décimales.

(2) En général une année est bissextile quand le millésime est divisible par 4, excepté quand ce nombre est terminé par deux zéros.

Digitized by Google

mation du calendrier en faisant commencer l'année le 22 septembre, jour anniversaire de la proclamation de la première république; en même temps, sur la proposition du poète *Fabre d'Églantine*, elle forma les noms suivants pour désigner les mois :

En automne : vendémiaire, brumaire et frimaire;

En hiver : nivôse, pluviôse, ventôse;

Au printemps : germinal, floréal, prairial;

En été : messidor, thermidor, fructidor.

Le calendrier républicain ne fut employé que du 6 octobre 1793 au 1er janvier 1806.

Un *lustre* est un temps composé de 5 ans; un *siècle* se compose de 20 lustres ou 100 ans.

APPENDICE V

MACHINES A CALCUL ET TABLES DE CALCULS FAITS

De tout temps on a cherché à simplifier les opérations de calcul au moyen de machines destinées à venir en aide aux calculateurs, en leur permettant de remplacer une partie au moins du calcul mental par des opérations purement mécaniques; les plus grands mathématiciens se sont préoccupés de la question et ont encouragé la publication des tables et des appareils qui facilitent les calculs usuels. Seulement il importe d'avoir la pratique des procédés abréviatifs; on se rappellera cette réponse bien connue d'un candidat auquel on faisait remarquer qu'il aurait pu employer les opérations abrégées et qui répliqua qu'il n'en avait pas eu le temps.

Le mécanisme des opérations de calcul a suggéré l'idée, surtout à partir du XVIIe siècle, de construire des instruments servant à effectuer les opérations; des tentatives fort nombreuses ont été faites dans ce but et une foule d'appareils ont été imaginés (1). D'un côté on a inventé des procédés graphiques qui peuvent quelquefois remplacer utilement les

(1) Le bureau météorologique de Londres est pourvu d'une série d'ingénieux appareils (C R A t. XCIX, p. 179). Th. *Olivier* a donné une nomenclature assez complète de ces machines à la suite d'un rapport présenté à la Société d'encouragement en juillet 1843 et M. Ed. *Lucas* en a réuni au Conservatoire des arts et métiers à Paris une collection très complète.

Digitized by Google

opérations de calcul ; c'est le *calcul par le trait*. Enfin des praticiens ont calculé des tables qui donnent des résultats tout faits : elles sont employées dans les établissements financiers et autres où l'on doit faire rapidement beaucoup de calculs.

MACHINES A CALCUL

L'immortel *Pascal* paraît être un des premiers qui ait eu l'idée de faire exécuter un calculateur mécanique destiné, comme il dit, « à suppléer au défaut de l'ignorance et du peu d'habitude ». La *Machine arithmétique* de Pascal fut inventée en 1642, alors qu'il n'avait que 18 ans, et on doit admirer le prodigieux effort d'imagination qu'il fallut au jeune homme pour inventer cette machine assez grossière ; on en trouvera la description complète dans l'Encyclopédie, à l'article *Arithmétique* (1) ; elle fut simplifiée d'abord par *Lépinne* puis récemment par le Dr *Roth* au moyen de son *automate ;* le dernier perfectionnement est décrit dans le bulletin de la Société d'encouragement de juillet 1843. La machine de Pascal était disposée pour faire le calcul des livres, sous et derniers ; l'*additionneur* du Dr Roth, et toutes les machines sont entièrement établies d'après le système décimal. Le chevalier *Morland*, sans savoir probablement ce que Pascal avait fait à cet égard, publia en 1673 deux machines arithmétiques, l'une pour l'addition et la soustraction, et l'autre pour la multiplication, sans néanmoins dévoiler la construction intérieure.

Nous citerons ensuite les *bâtons de Neper* (1627) dont nous donnerons une idée à la fin de cet appendice ; ils sont décrits d'ailleurs dans la *Rhabdologia* du célèbre géomètre Neper. L'*Arithmétographe* inventé en 1860 par l'ingénieur *Dubois* n'est qu'une ingénieuse modification des bâtons de Neper. *Leibnitz* présenta une *Machine arithmétique* à Colbert et l'académie des sciences la trouva excellente (Miscellanea *Berlinensis*, 1710) ; on voit la description de la machine de Leibnitz et d'une autre du marquis *Polenius* dans le *Theatrum arithm.* de *Leupold*, imprimé en 1727 avec celle de Leupold lui-même. On a aussi l'*Abaque rubdologique* de M. *Perrault*, dans le recueil de ses machines, donné en 1700 ; il servait pour l'addition, la soustraction et la multiplication. Le recueil des machines présentées à l'académie des sciences de Paris offre encore trois machines de M. *Boitissandeau*. *Gerstein*, professeur de mathéma-

(1) M. Sonnet, dans son dictionnaire de mathématiques appliquées, donne une dée sommaire de la machine.

Digitized by Google

tiques à Giessen, donna en 1735, à la société royale de Londres, la description très détaillée de sa machine propre. Nous citerons encore les machines de MM. *Pereire* (1750), lord *Mahon* (1776), *Kahn* (1777); puis la *Machine à calculer* inventée en 1786 par le capitaine du génie *Müller* (Hesse-Darmstadt). Le *calculateur mécanique* inventé en 1820 par un sieur *Guesnal*, au moyen duquel on pouvait faire les 4 opérations fondamentales. La *machine à calculer* du suédois *Scheutz* pour calculer les tables mathématiques par la méthode des différences en imprimant les résultats sur des planches stéréotypes; elle fut perfectionnée en 1859 par un célèbre constructeur anglais *Donkin* et décrite par Ch. *Babbage* (C R A, t. XLI, p. 557); elle obtint la médaille d'honneur à la grande exposition de l'industrie à Paris en 1856. Babbage est lui-même l'inventeur de la *Machine analytique* qui a pour but d'effectuer les opérations analytiques et arithmétiques dont les lois lui sont tracées et d'en imprimer les résultats; il y consacra une grande partie de sa vie, presque toute sa fortune, et il mourut avant d'avoir pu en achever la construction. L'*arithmomètre* de *Thomas* de Colmar a été inventé en 1819; il fut breveté en 1820 et notablement perfectionné depuis lors; il fait lui-même toutes les opérations sans le secours de l'expérimentateur; celui-ci ne doit tourner qu'une manivelle; à l'aide de cette machine on multiplie en une demi-minute deux nombres de dix chiffres chacun; l'inventeur la présenta à l'académie des sciences de Paris en 1854 (C R A, t. XXXIX, p. 1117); c'est la machine à calcul la plus perfectionnée qui ait paru jusqu'à ce jour; elle a été décrite dès 1851 par *Benoit* dans le bulletin de la Société d'encouragement. *Tchebicheff* est l'inventeur d'une *Machine arithmétique* dont le mécanisme servant à effectuer les multiplications et les divisions contient des innovations extraordinairement intéressantes.

Sturm, israélite polonais, avait inventé une machine qu'il était parvenu à faire fonctionner à ce point que, non seulement elle accomplissait les quatre opérations arithmétiques et la règle de trois, mais elle extrayait les racines carrées, elle donnait les fractions complètement réduites et se prêtait à tous les calculs logarithmiques. Avec une clef, on montait les chiffres du problème, puis on tournait une manivelle, et, en quelques secondes on obtenait le résultat dont la recherche aurait fatigué le calculateur le plus exercé. Cette machine était très simple et le rouage facile à expliquer. L'appareil n'excédait pas un pied de long; la mort de l'inventeur et les événements postérieurs ont empêché la mise en pratique

Digitized by Google

de cette intéressante découverte (1). MM. *Maurel* et *Jayet* inventèrent en 1839 l'*Arithmaurel* qui obtint le prix mécanique de la fondation Montyon; cet appareil reproduisait le principe introduit pour la première fois par Thomas dans son arithmomètre. M. *Binet* a rendu compte de l'Arithmaurel dans un rapport adressé à l'Académie des sciences en 1849 (2). La *taxe machine* de *Baranowski* (1849) est une machine au moyen de laquelle on calcula et l'on imprima en 75 minutes une table d'annuités sur la vie, alors qu'il aurait fallu au moins 175 minutes à un calculateur fort habile qui suivrait la voie ordinaire; ajoutons que le contrôle exigerait encore au moins deux calculateurs auxiliaires.

Nous continuons cette énumération pour quelques machines moins importantes: La *Machine à calcul* de M. de *Guigné* (C R A, t. LX, p. 101); Le *clavichiffre* de M. *Graillat* (1871). La *Machine à calcul* de M. d'*Argy* (1851) destinée à remplacer, pour les besoins du commerce et de la vie commune, les Tables des comptes faits. Le *Calculateur mécanique* de M. J. *Boué* (C R A, t. LXXXIII, p. 565).

La machine arithmétique d'*Aubrey* (1849), très simple et très peu coûteuse, puisque celle qui multipliait ou qui divisait des nombres de neuf chiffres ne revenait qu'à 5 francs. Les *colonnes arithmonomiques* par M. *Merpau Duzélidest* (C R A, t. XXI, p. 572). L'*appareil* de *Willoughby* (1852) servant à faciliter, pour l'enseignement primaire, les exercices de calcul qu'on fait faire aux élèves ainsi que les *Jetons Bardot* qui sont des cubes en bois, les uns blancs et les autres noirs, à l'aide desquels on explique matériellement la numération aux commençants L'*Arithmographe polychrome*, par M. *Dubois;* cet instrument, dans lequel chaque dizaine est caractérisée par une couleur particulière, a été décrit dans les C R A, t. LI, p. 293 et t. LIII, p. 618; comme le dit l'inventeur, il s'était proposé pour but de construire un appareil à calculer, simple, d'un prix très peu élevé, sans rouages ou organes mécaniques quelconques, avec lequel on pût faire en quelque sorte automatiquement et sans tension d'esprit toutes les opérations de l'arithmétique. Quoique cet instrument ne paraisse pas pouvoir être employé avec avantage par les calculateurs, on doit reconnaître qu'il y a une idée neuve et ingénieuse dans le principe sur lequel repose la construction. La *Table à calculer* de *Leroy* (C R A, t. LI, p. 536). La belle et ingénieuse machine du

(1) Note communiquée aux journaux du temps, par M. Joachim Lelewel (1849).
(2) Voir le dictionnaire de mathématique de M. Sonnet et celui de Larousse.

Digitized by Google

Suédois *Wiberg*, avec laquelle on peut, au moyen des différences de divers ordres, calculer et imprimer des tables numériques (C R A, t. LVI, p. 211 et 330); elle a été employée pour établir des tables d'intérêt, des tables de logarithmes et des tables astronomiques. L'*Arithmoplanimètre* inventé en 1839 par l'ingénieur *Léon Lalanne*, au moyen duquel on effectue très facilement les calculs les plus compliqués de la géométrie; cet appareil peut aussi servir de machine à calcul universelle, car il donne, à un millième près, les produits d'un nombre quelconque de facteurs entiers ou fractionnaires, les puissances entières ou fractionnaires d'un degré quelconque (C R A, t. IX, p. 800). Les *Tablettes arithmétiques*, par M. *De Russel d'Inval* (C R A, t. X, p. 324). Le *triangle calculateur* de M. Lucien Anspach, professeur à l'Université de Bruxelles, a été exécuté par M. *Ch. Crabbe* (1889); il permet d'obtenir, avec une grande rapidité, les résultats rigoureux des multiplications, divisions, extractions de racines carrées, etc., et permet, en outre, d'obtenir, d'une façon à peu près immédiate, les résultats approximatifs de ces opérations ainsi que de divers calculs qui sont du domaine des mathématiques transcendants. Nous ajouterons que ce tableau n'est qu'une modification de l'abaque universel de Lalanne; c'est une table à deux entrées, de forme rectangulaire, et qui donne, à la simple vue, le produit et le quotient de deux nombres, les carrés et les racines carrées, etc.

Nous devons citer aussi le *souwan-pan*, avec lequel les Chinois effectuent les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, comme il résulte d'une lettre adressée par *D'Escayrac de Lauture* à *Chasles* (C R A, t. LI, p. 88); d'après le P. *Martini*, le souwan-pan aurait été imaginé, comme l'arithmétique elle-même dont il est l'instrument pratique, par un ministre de *Hoangti*, troisième empereur des Chinois, 2897 ans avant la naissance de Jésus-Christ. Les Romains possédaient un instrument de calcul analogue qu'ils appelaient *Abacus* mais qui était plus complet, car il comportait même le calcul des fractions (C R A, t. LI, p. 90). Plusieurs exemplaires de l'Abacus romain nous sont parvenus; il en existe un au cabinet des antiques de la bibliothèque nationale à Paris. Le *boulier-compteur*, très répandu dans nos écoles, a été employé par *Woizard* dans un cours d'arithmétique qu'il professait en 1826 aux ouvriers de Metz, sur les indications de M. *Poncelet*, qui avait vu en 1813 et 1814 le *Stchota* généralement employé dans le commerce de détail en Russie.

Digitized by Google

RÈGLES A CALCUL

On fait rarement usage des machines à calculer parce que, d'un côté leur prix est très élevé, et que, de l'autre côté, leur maniement exige une attention soutenue. On aime mieux se servir des instruments à échelle logarithmique comme les règles à calculer. Une notice publiée par *Jomard*, membre de l'Institut, en mars 1816, à la suite d'un rapport de Ampère sur l'*arithmographe* ou règle logarithmique, circulaire de M. *Gattey*, apprend que les Allemands ont eu les premiers l'idée ingénieuse de mettre les logarithmes sur un instrument demi-circulaire ; plus tard, Scheffelt porta les divisions sur un pied, et l'anglais *Gunter* (1624) y appliqua une échelle à coulisse logarithmique (*Hiding rule*) (1). En 1761, *Lambert* fit exécuter à Augsbourg de grandes règles de quatre pieds de long, qui donnaient les deux millièmes parties des nombres. Depuis l'invention de la règle logarithmique, il n'y avait que sa parfaite exécution et surtout son usage populaire qui fussent importants : *Mountain* en 1778, *Makay* en 1802, *Jones* en 1814, étaient parvenus à des moyens de construction exacts et peu dispendieux. La règle de M. Jones a été décrite par Jomard dans le bulletin de la Société d'encouragement (août 1815), époque à laquelle ce savant engagea M. *Lenoir* fils, à s'occuper de la construction des règles logarithmiques, il exécuta d'abord la règle proposée par Jomard et calculée par *Corabœuf*, dont la partie divisée a trente-cinq centimètres; il fit ensuite celle de vingt-cinq centimètres, dont les divisions furent calculées par *Collardeau* qui a publié, en 1820, la première instruction française sur cet instrument. Dans ce genre d'appareils nous citerons ensuite la règle à calcul modifiée par *A. Mannheim* (1853), celle de L. *Cuncq* (1858), celle à double réglette de *Péraut*, négociant à Nancy (1869), les *réglettes multiplicatrices*, par *H. Genaille* (1878); elles furent perfectionnées par *E. Lucas* (1885). Récemment on a imaginé d'adopter la forme circulaire; M. *Boucher* a inventé ainsi le *cercle à calcul* construit par M. Morin ; nous en parlerons plus loin.

---

(1) La plus ancienne description du *Hiding rule* se trouve dans un ouvrage de *Oughtred* publié à Londre en 1633 et intitulé : *The circles of proportion*, etc. ; ceux-ci étaient ce que les Anglais appellent *circular Hiding rules*. Ce qui prouve que la règle à calcul a été connue bien longtemps avant que Wingate et Gunter n'aient songé à construire cet appareil.

Digitized by Google

CALCUL PAR LE TRAIT (1).

Le *calcul par le trait* est l'ensemble des procédés graphiques qui peuvent, au besoin, remplacer des opérations de calcul. Dans cet ordre d'idée nous citerons la méthode générale que M. *Cousinery*, ingénieur en chef des ponts et chaussées en France, exposa dans son ouvrage ayant pour titre *le Calcul par le trait* et qui est fondée sur l'emploi de deux spirales, qu'on suppose avoir été tracées une fois pour toutes (2). Nous appellerons aussi l'attention sur les procédés imaginés par M. *Massau*, professeur de mécanique à l'école des ponts et chaussées, annexée à l'Université de Gand; ces travaux très remarquables ont été publiés dans les annales de l'association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand (année 1878 et suivantes).

TABLES DE CALCULS FAITS.

De nombreuses tables ont été calculées pour des questions spéciales; elles sont répandues dans une foule de recueils. Sans parler de la table de multiplication dite de Pythagore, qu'on a souvent utilisée dans sa disposition principale, ni des nombreuses tables sur les intérêts composés publiées dès le commencement du XVIIe siècle (3), nous citerons spécialement les ouvrages suivants : *Tafeln der. Quadratzahlen aller natürlichen zahlen von 1 — 25200*, Leipz. 1812; *le tableau comparatif de la nouvelle et de l'ancienne méthode de calculer les intérêts à 5 p. c., par M. Mangol*, Strasbourg, 1827; *le tableau de Nicolas Morain pour le partage d'une somme d'argent exprimée en livres, sous et deniers, entre un nombre déterminé de personnes* (4); les tables publiées dans tous les pays pour la conversion des mesures; les tables de *Arnaud* (1850) destinées à abréger les opérations de la multiplication et de la division; les tables de *Laquern de Kerthoman* (1852) à l'usage des employés des douanes; ces tables donnent dans un cadre restreint 17000 multiples de 34; les tables *dyarithmiques et rysindyniques* par *Rodierre* (1852) aussi

(1) Voir le Dictionnaire de mécanique appliquée, par H. Sonnet.

(2 Récemment (1888), cette idée a été reprise par l'ingénieur *F. Raux;* son ouvrage est intitulé *calculs instantanés* très approximatifs par les courbes spirales.

(3) Les plus anciennes de ces tables, publiées en Angleterre, sont celles de Richard *Witt* (1630), et de Robert *Butler* (1633), puis les tables de l'intérêt simple de l'escompte par *John Imfart* (1707).

(4) Ce tableau se trouve aux archives de la ville de Gand.

Digitized by Google

pour la multiplication et la division des nombres; la table des diviseurs de *Ramon Picarte*, publiée sous le nom de la *Division réduite à une addition* (1857); elle offre sur une seule ligne les quotients des neuf premiers nombres, ou des neuf chiffres, par l'un des nombres compris entre 1000 et 10000 avec 10 chiffres significatifs; il y a donc 9000 lignes de cette espèce qui renferment tous les diviseurs de 1 à 10000; les tables de *Barlow*, réimprimées plusieurs fois en Angleterre; elles contiennent une colonne qui donne avec sept chiffres les fractions dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est un des dix mille premiers nombres; il y a aussi les « *Barlow's* Tables of squares cubes square roots reciprocals » (Londres 1873); enfin les tables des carrés des nombres entiers de 1 à 10000 avec lesquelles on peut trouver aussi les carrés des nombres jusqu'à cent millions et la racine carrée d'un nombre quelconque; elles ont été établies en 1859 par M. Retsin, professeur de mathématiques supérieures à l'athénée royal de Gand.

Les *tables graphiques* sont des tracés dont l'emploi peut remplacer celui des tables numériques. Parmi ces tables, les unes sont à *simple entrée*, les autres sont à *double entrée*. Dans les premières, la quantité dont on consigne les valeurs ne dépend que d'une seule quantité variable, à laquelle on donne le nom d'*argument;* ainsi dans une *table de mortalité* l'argument est l'âge des survivants, c'est-à-dire qu'en regard de chaque âge la table donne le nombre des survivants de cet âge, sur un nombre donné de naissances simultanées. Dans les tables à double entrée, la quantité dont on consigne les valeurs dépend de deux arguments; ainsi dans une table des diamètres des conduites d'eau, les arguments seraient la dépense par seconde et la charge par mètre de longueur. Quand on n'a pas besoin d'une très grande exactitude, ou quand la nature de la question ne comprend pas une solution rigoureuse, à cause de l'incertitude des données, l'emploi d'une table numérique peut être remplacé par celui d'un tracé équivalent. Dans la plupart des cas, ce procédé consiste dans l'emploi d'une courbe qui forme une de ces *tables graphiques* dont on fait aujourd'hui un emploi général; c'est ainsi qu'on représente par des courbes la plupart des lois physiques, les lois purement humaines, enfin les simples faits sociaux. Pour de plus amples détails voir le Dictionnaire de mathématiques appliquées par M. H. Sonnet. (Tables graphiques.)

Pour donner une idée des appareils de calcul, nous décrivons ici l'usage des bâtons de Neper, celui de la règle de calcul et enfin celui du cercle à calcul de M. Boucher.

Digitized by Google

BATONS DE NEPER

Construction. — La fig. 1 représente un des bâtons. On voit que la longueur est 9 fois la largeur, qu'elle a été divisée en 9 parties égales, de manière que le bâton offre à sa surface neuf rectangles égaux; que les nombres 16, 24, 32, 40... écrits les uns au-dessous des autres dans les cases successives, sont le double, le triple, le quadruple, etc., du nombre 8 placé en tête de la colonne; qu'enfin le chiffre des dizaines de ces multiples est séparé dans chaque case par une diagonale tirée du sommet supérieur à droite vers le sommet inférieur à gauche.

8
1/6
2/4
3/2
4/0
4/8
5/6
6/4
7/2

Fig. 1

1	1	2	9	6
2	0/2	0/4	1/8	1/2
3	0/3	0/6	2/7	1/8
4	0/4	0/8	3/6	2/4
5	0/5	1/0	4/5	3/0
6	0/6	1/2	5/4	3/6
7	0/7	1/4	6/3	4/2
8	0/8	1/6	7/2	4/8
9	0/	1/8	8/1	5/4

Fig. 2

On prépare, pour chaque chiffre (zéro compris) un certain nombre de bâtons, puis un bâton dont les cases ne sont pas divisées et dans lesquelles sont inscrits simplement les nombres naturels de 1 à 9; on pourra ensuite obtenir le produit de deux nombres entiers composés de plusieurs chiffres de la manière suivante :

Soit par exemple à multiplier 1296 par 3456; on place les uns à côté des autres les bâtons portant en tête les chiffres 1296 et à côté vers la gauche le bâton portant les chiffres simples fig. 2). On observe alors que la série des cases horizontales du 2e rang donne le double de 1296; et la série du 3e rang, du 4e rang, etc., le triple, le quadruple, etc., de 1296. Il ne s'agit que de copier les chiffres inscrits dans une même bande horizontale en ayant soin d'ajouter le chiffre des dizaines de chaque case au chiffre des unités de la case immédiatement à gauche. Ainsi le produit de 1296 par 6 se compose de

$$\begin{array}{r} 153 \\ \underline{6246} \\ 7776 \end{array}$$

ce qu'on forme facilement de tête; on forme de même le produit de 1296 par 5 qui est 6480, par 4 qui

Digitized by Google

est 5184 et par 3 qui est 3888 ; on forme ensuite la somme des produits partiels d'après la méthode ordinaire. L'utilité des bâtons de Neper c'est donc de donner les produits partiels sans effectuer de multiplication.

RÈGLE A CALCUL

La règle à calcul se compose d'une partie fixe, qui est, à proprement parler, la règle, et d'une mobile, qui glisse à l'intérieur de la première et que l'on appelle *réglette*.

La règle et la réglette portent deux échelles parfaitement identiques et dont les deux moitiés sont divisées et numérotées exactement de même.

Sur la première partie à gauche on voit les dix nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

placés à des distances du point initial 1 proportionnelles aux logarithmes de ces nombres, par conséquent inégales entre elles.

La seconde moitié à droite étant divisée à partir du milieu 10 comme la première moitié à gauche à partir de 1, il en résulte que les divisions de la seconde moitié de la règle sont à des distances du milieu 10 proportionnelles aux logarithmes des nombres 2, 3, etc., et à des distances du point initial 1 proportionnelles aux logarithmes des nombres décuples 20, 30, etc.

Ainsi la lecture des nombres correspondants aux divisions principales marquées sur les échelles de la règle et de la réglette peut se faire de plusieurs manières :

1° En énonçant les nombres

1, 2, 3,..., 10, 2, 3,..., 10.

tels qu'ils sont inscrits sur l'instrument ;

2° En énonçant les nombres

1, 2, 3,..., 10, 30,..., 100 ;

3° En énonçant les nombres

10, 20, 30,..., 100, 200, 300,..., 1000...

Dans chaque mode de lecture, les nombres intermédiaires sont donnés par les divisions secondaires et par leurs subdivisions.

Ainsi les divisions secondaires placées entre 1 et 2 correspondent aux nombres 1, 1 ; 1, 2 ; 1, 3 ; etc.

Les subdivisions placées entre 1 et 1, 1 correspondent de même aux nombres 1 01 ; 1.02 ; 1.03 ; et ainsi de suite.

Digitized by Google

Les divisions secondaires et leurs subdivisions ne sont pas toutes marquées ; mais on doit les supposer et les estimer à vue dans le cas où elles deviennent nécessaires.

Pour trouver, à l'aide de la règle à calcul, le produit de deux nombres, il faut placer le 1 de la réglette sur l'un des deux nombres lu sur la moitié à gauche de l'échelle principale de la règle. Le produit cherché correspond, sur la règle, au second nombre lu sur la réglette.

Ainsi, pour trouver le produit de 2 par 3, on amène le 1 de la réglette sous le nombre 2 lu sur la moitié à gauche de l'échelle principale de la règle, et le produit 6 correspond sur la règle au facteur 3 lu sur la réglette.

En effet, le logarithme du nombre 6, qui correspond sur la règle au nombre 3 lu sur la réglette, est évidemment la somme des logarithmes des facteurs 2 et 3 ; donc ce nombre 6 est le produit de 2 par 3.

De même le produit 13, de 2 par 6.5, se lit sur la règle au-dessus du facteur 6,5 lu sur la réglette.

Pour diviser deux nombres l'un par l'autre, il faut amener le point de la partie à gauche de la réglette correspondant au diviseur sous le point de la partie à droite de la règle correspondant au dividende. Le point de l'échelle de règle sous lequel tombe le 1 de la réglette indique la valeur du quotient.

CERCLE A CALCUL (1).

Le cercle à calcul de M. *Boucher* date de 1877 ; il permet de faire, comme la règle logarithmique, la multiplication, la division, ainsi que l'extraction des racines de divers ordres, et l'opération inverse, c'est-à-dire l'élévation aux puissances correspondantes.

Son grand avantage est de se présenter sous une forme circulaire, c'est-à-dire portative, il a exactement le volume et l'aspect d'une montre. Il comporte comme parties essentielles : 1° un cadran tournant dont les divisions angulaires correspondent à volonté aux logarithmes de 1 à 10 ou de 10 à 100 ou de 100 à 1,000 et ainsi de suite ; ce cadran est manœuvré à l'aide d'un bouton qui remplace le remontoir d'une montre ; ce cadran tourne sous un index fixe ; 2° une aiguille concentrique au cadran, et qui ne sert que de repère.

(1) Je dois cette note à M. Boulvin, professeur à l'université de Gand, qui emploie constamment cet appareil pour ses calculs.

Digitized by Google

L'opération type est la multiplication, elle se fait de la manière suivante : le logarithme du multiplicande est amené sous l'index fixe, l'aiguille est placée sur l'origine de la division du cadran, on fait ensuite reculer le cadran sous l'aiguille fixe jusqu'à ce que le multiplicateur vienne se placer sous l'aiguille. On lit le produit sous l'index, les mouvements opérés ayant eu pour effet d'ajouter les logarithmes des nombres à multiplier.

La division exige les même déplacements du cadran et de l'aiguille, mais effectués dans un ordre inverse.

Pour le calcul des carrés, des cubes, des racines carrées et des racines cubiques, il existe sur le cadran plusieurs cercles concentriques dont les divisions sont doubles ou triples des premières : l'aiguille marque donc sur les cercles en question le carré et le cube, respectivement, du nombre lu sur la graduation extérieure.

L'appareil comporte également un cadran gradué d'après les logarithmes d'une ligne trigonométrique, par exemple le sinus, d'où l'on déduit facilement toutes les autres.

Lorsque l'opérateur a acquis un peu d'habitude, il exécute toutes les opérations indiquées ci-dessus avec une approximation de $\frac{1}{100}$.

Digitized by Google

APPENDICE VI.

VOCABULAIRE ÉTYMOLOGIQUE.

A.

Abaque du latin *abacus* (du grec ἄβαξ, buffet, table).

Addition du latin *additio* (de *addere*, ajouter).

Aime du latin *hama*, seau.

Août (*Augustus* en flamand) du nom du successeur de Jules-César, l'empereur Auguste. Ce mois s'appelait autrefois *Sextilis* à cause du rang qu'il occupait dans l'année de Romulus.

Are du latin *area* (surface).

Arithmétique du grec ἀριθμητικός qui se rapporte au calcul (de ἀριθμός, nombre).

Arpent de *arepennis*, expression gauloise.

Aune de *ulna* (avant bras), par l'intermédiaire du bas latin *alena*; ancien haut allemand *elina*, allemand *elle*.

Avril (*April* en flamand) du latin *Aprilis* (de *aperire*, ouvrir: c'est l'époque de l'année où la terre *s'ouvre* pour laisser pousser les plantes).

Axiome du grec ἀξίωμα (proposition).

B.

Billion formé sur le modèle de million, avec *bi* pour *bis*.

Boisseau du bas latin *bustia*, en français *boiste*; d'où un diminutif *bustellus*, *boisteau* et aussi *boisseau*; le boisseau avait une contenance d'environ 13 litres.

Bonnier du latin *bonnarium*, mesure agraire.

C.

Calcul du latin *calculus* (petit caillou); parce qu'il paraît qu'à Rome on apprenait le calcul aux enfants avec des petits cailloux. Horace dit que, dans son enfance, il allait au collège portant des sachets remplis de cailloux.

Digitized by Google

Calculer les Romains n'avaient pas l'infinitif *calculare;* ils disaient *calculos subducere* (ôter les cailloux); le mot *calculare* se trouve pour la première fois chez *Aurelius Prudentius Clemens*, poète chrétien né en 348 en Espagne.

Calendrier du latin *calendarium* (de *calendæ*, nom donné par les Romains au premier jour du mois).

Carat du grec κεράτιον, silique (fruit) servant de poids.

Centi du latin *centum* (cent).

Centime du latin *centesimus* (centième partie).

Chiffre Voir le mot *zéro*.

Cinq du latin *quinque* (même signification).

Congruence de *congruent*, du latin *congruens* participe présent de *congruere* (convenir, s'accorder).

Corollaire du latin *corollarium* (même signification).

Cube du latin *cubus* (même signification).

D.

Déca du grec δέκα (dix).

Décembre du latin *December* (de *decem*, dix, parce que c'était le 10e mois du premier calendrier de Romulus); c'est le 12e depuis l'édit de Charles IX de 1564.

Déci du latin *decimus* (dixième).

Décime du latin *decima* (sous-entendu *pars*, dixième partie).

Denier du latin *denarius* (dix as).

Deux du latin *duo* (même signification).

Dividende du latin *dividenda*, sous entendu *pars* (ce qui doit être divisé).

Diviseur du latin *divisor* (qui divise).

Division du latin *divisio* (action de diviser).

Drachme du grec δραχμή (monnaie et poids).

Ducat Ce nom se présente vers 1100; il est dû probablement aux empereurs byzantins Constantin X (1059-1067) et Michel (1071-1078) qui se faisaient désigner sur leurs monnaies par leur nom de famille *Ducas*. D'après Scheler, il viendrait du terme *ducatus*, désignant une monnaie frappée vers 1140, par Roger II, roi de Sicile, pour le duché de Pouille (*ducato d'Apuglia*).

Ducaton diminutif de ducat.

Digitized by Google

E.

Escalin du vieux haut allemand *skilling*.

F.

Facteur du latin *factor* (qui fait).

Février (*February* en flamand) du latin *februarius*, *februx* sacrifice, parce que c'était pendant ce mois que les Romains faisaient les sacrifices pour les morts.

Florin Ce mot est originaire de Florence, où l'on monnaya, en 1250, les premières pièces de ce nom, sur lesquelles se trouve une *fleur* de lis.

Franc Ce mot vient d'une inscription qui y était primitivement gravée : *Francorum rex*. Selon Scheler, il tirerait son nom de la figure d'un Franc ou Français qu'il représentait à l'origine.

G.

Gramme du grec γράμμα (ancienne mesure grecque valant deux oboles).

H.

Hecto du grec ἑκατόν (cent), sert à former hectare, hectolitre, etc. (1).

Huit du latin *octo* (même signification).

J.

Janvier (*January* en flamand) du latin *Januarius* de *Janus*, nom d'un dieu qu'on représentait avec deux visages (le

(1) Ch. Nodier a dénoncé la formation hybride et barbare des composés de la nomenclature du système métrique, qui défie toutes les lois de l'analogie et du bon sens : *hectomètre* est un barbarisme détestable, *cent* se disant en grec *hécaton* et non pas *hecton* qui signifie *sixième ;* un *kilomètre* est-ce *mille* mètres ? non : avec la meilleure volonté du monde, ce ne peut être que *la mesure d'un âne* (*killos*, bourrique) ; corrigeons-nous *khilomètre*, la mesure d'un âne deviendra la *mesure du fourrage*, de foin (*chilos*, fourrage), et nous n'en serons guère plus avancés ; le vrai nom serait *chiliomètre ;* c'est aussi l'avis de MM. Brachet et Dussouchet. Quant aux noms des sous-multiples, *décimètre*, *centimètre*, *milligramme*, ils violent doublement les lois de la composition, et parce qu'ils sont hybrides, et parce que le premier terme, d'après les lois de la composition latine, signifie *dix*, *cent*, *mille*, et non *dixième*, *centième*, *millième*. Après cela faut-il s'étonner que les Grecs modernes aient emprunté aux Français leur système métrique, mais non la nomenclature de ce système ?

Digitized by Google

premier mois considère à la fois l'année qui commence et celle qui finit); il est le premier mois depuis l'ordonnance de Charles IX (1564).

Juillet de *juinet*, diminutif de juin, c'est-à-dire le mois qui suit juin; *juinet* devint *juillet* par l'influence du mois latin *Julius* avec lequel on voulu l'accorder.

Juin (*Junij* en flamand) de *Junius*, en l'honneur de *Junon*, mère des dieux.

K.

Kilo pour *chilio*, du grec χίλιος (mille).

L.

Lemme du latin *lemma* (même signification).

Liard était, d'après Ménage et Génin, le nom de celui qui aurait frappé les premiers liards; d'autres croient que liard est le même mot que *le hardi* (vieux français : *li ardi*), petite monnaie du midi de la France; selon une troisième opinion, ce nom viendrait du vieux français *liart* (blanc), parce que le liard était, à l'origine, une monnaie d'argent.

Litre du grec λίτρα; c'est un poids, livre de 12 onces; 1 décimètre cube d'eau distillée à 4° pèse un kgr., et l'on a transporté à ce volume le nom litre d'un poids grec. C'était aussi une petite monnaie de la valeur de deux oboles, à peu près 30 centimes.

Livre de *libra* (comparez grec λίτρα) livre monnaie parce que cette livre, à l'origine, était aussi pesante que la livre poids.

M.

Mai du latin *majus*.

Marc de l'allemand *mark* (marque).

Mars du latin *Martius* (de *Mars*, dieu de la guerre).

Mathématiques du grec μαθηματικός, de μαθήματα, les mathématiques (littéralement les connaissances).

Mètre du grec μέτρον (mesure).

Digitized by Google

Mega du grec μέγας (grand); devant le nom d'une unité signifie *million*; ex. *mégamètre*, un million de mètres, ou 1000 km.

Micron du grec μίκρος (petit); devant le nom d'une unité signifie *millionième*.

Milliard vient de *mille*, avec la finale augmentative *ard*.

Million de *mille*, avec la finale augmentative *ion*.

Muid du latin *modius* (boisseau).

Multiplicande du latin *multiplicandus* (qui doit être multiplié).

Multiplicateur du latin *multiplicator* (qui multiplie).

Multiplication du latin *multiplicatio* (action de répéter).

Myria du grec μύριοι, neutre μύρια (dix mille).

N.

Nombre du latin *numerus* (même signification).

Novembre du latin *November*, de *novem* (neuf), parce que c'était le neuvième mois du premier calendrier de Romulus.

Numération du latin *numeratio* action de compter).

O.

Octobre du latin *October* de *octo* (huit), parce que c'était le huitième mois du premier calendrier de Romulus.

Once du latin *uncia* (grec οὐγκία).

Onze du latin *undecim* (même signification).

P.

Patard du bas latin *patardus* d'origine inconnue.

Problème du grec πρόβλημα (question proposée).

Produit du latin *productum*, chose produite (*producere*, produire).

Proportion du latin *proportio*, mot créé par Cicéron pour rendre le grec ἀναλογία.

Q.

Quatrillion de *quatri* (emprunté à quatrième, du latin *quatuor*, quatre) puis du suffixe *llion*, sur le modèle de million.

Quintal de l'arabe *qintar* (poids de cent).

Quintillion de *quint* (latin *quintus*, de *quinque*, cinq) puis du suffixe *llion*.

Quotient du latin *quotiens* (combien de fois).

Digitized by Google

R.

Rasière mesure de grains remplie à *ras*, dont la signification est la même que celle de *rez* (dans rez-de-chaussée), c'est-à-dire niveau.

S.

Schelling de *schellen* (sonner), proprement monnaie sonnante (?).
Scolie du grec σχόλιον (note).
Scrupule de *scrupulus*, proprement petite pierre (de *scrupus*, rocher).
Septembre du latin *September*, de *septem* (sept), parce que c'était le septième mois du premier calendrier de Romulus.
Sextillion de *sex* (six), par l'adjectif *sextus* et du suffixe *llion*. Comparez sextuple.
Sou ou *sol* de *solidus*, sous entendu *nummus* (pièce d'or), proprement pièce épaisse.
Soustraction du latin *substractio* (action de retirer).
Stère du grec στερεός (solide).

T.

Taux du vieux français *tausser* (du latin *taxare*).
Théorème du grec θεώρημα (même signification .
Toise du bas latin *Tensa* ou *tesa* (largeur des bras étendus), du latin *tensus* (tendu).
Trillion du mot *tri* (trois), puis du suffixe *llion* sur le modèle de million.
Trois du latin *tres* (vieux français, *treis*).

U.

Un du latin *unus* (même signification).
Unité du latin *unitas* (de *unus*, un), même signification.

V.

Verge du latin *virga* (même signification).

Digitized by Google

Z.

Zéro Chez les Arabes, ce caractère portait le nom de *çafrun* ou *cifrun* (vide); importé en Italie dans les premières années du XIVe siècle, ce mot devint *cifra* ou *zefiro*. La syllabe *fi* étant brève, ce dernier mot se réduisit à zéro, pendant que le premier finit par désigner les neuf autres caractères; notre terme *chiffre* (*cijfer* en flamand) n'est autre chose que le mot *cifra* avec la prononciation italienne du c. Les Anglais ont conservé au mot chiffre (*cipher*) son sens étymologique de zéro, de même que les Arabes modernes et les Turcs (*syfr*); les neuf autres caractères portent le nom de *figures* qu'ils ont eu longtemps en français. Ce n'est qu'au XIIe siècle qu'on renonça aux colonnes dans lesquelles on plaçait les unités des différents ordres et qu'on se servit exclusivement du zéro pour marquer les places vides.

Digitized by Google

Note I (page 2). — Chez les Grecs la *mathématique* (μαθηματική) signifiait l'instruction, la science par excellence; elle embrassait l'ensemble de toutes les connaissances certaines et coordonnées; elle comprenait l'arithmétiqne, la géométrie, l'astronomie, la musique, la mécanique et l'optique. Ce ne fut qu'après de longs travaux que chacune de ces parties ayant reçu assez de développements pour constituer une science à part, les mathématiques furent réduites à la science des grandeurs mesurables. D'après *Cournot*, les spéculations mathématiques ont pour caractère commun et essentiel de se rattacher à deux idées ou catégories fondamentales : l'idée d'*ordre* sous laquelle il est permis de ranger les idées de situation, de configuration, de forme et de combinaison; et l'idée de *grandeur* qui implique celle de quantité, de proportion et de mesure. *Auguste Comte* assigne pour but à la science mathématique, la mesure indirecte des grandeurs, et dit qu'on s'y propose constamment *de déterminer les grandeurs les unes par les autres d'après les relations précises qui existent entre elles.*

Note II (page 11). — Détermination du chiffre qui, dans la suite naturelle des nombres, occupe un rang donné.

M. *d'Ocagne* (*C R A*, t. CVI, p. 190) a donné une solution fort élégante de ce problème, que nous allons reproduire ici parce qu'elle montre combien l'emploi de certaines notations peut abréger le raisonnement.

Désignons par $(n|1)$ un nombre exclusivement composé de chiffres 1, au nombre de n; de sorte que $(3|1) = 111$; puis par $N(p)$ un nombre formé de la manière suivante : 1° on écrit le chiffre p; 2° à la droite de ce chiffre, p fois le chiffre 8; 3° enfin le chiffre 9; c'est ainsi que $N(3) = 38889$. Le symbole $N(p)$ représente aussi le nombre des chiffres écrits dans la suite des nombres entiers naturels avant le nombre 10^{p+1}.

Voici maintenant la règle établie par M. d'Ocagne : Soit k le rang du chiffre à déterminer; on commence par établir le nombre n tel que $N(n-2) < k \leqq N(n-1)$; puis on effectue la division de $k + (n|1)$ par n; soient Q le quotient entier et R le reste de cette division.

1° Si $R \gtrless o$, le chiffre demandé est le R^e, à partir de la gauche, du nombre Q; 2° si $R = o$ le chiffre demandé est le 1er à partir de la droite du nombre $Q - 1$.

Digitized by Google

Exemple : Dans la suite naturelle des nombres, quel est le millionième chiffre écrit?

Solution : $k = 1000000$ et comme $N(4) = 488889$ et $N(5) = 5888889$, on voit que $N(4) < k < N(5)$; donc $n = 6$; en outre $k + (n|1) = 1000000 + 111111 = 1111111$. Divisons ce nombre par 6, on trouve pour quotient entier 185185 et pour reste 1 : le millionième chiffre est donc le premier à gauche du nombre 185185, c'est-à-dire le chiffre 1.

Note III (page 12). — D'après *Hoppe*, le mathématicien philosophe de Berlin, calculer c'est toujours montrer qu'un nombre déjà décomposé d'une certaine manière peut l'être autrement. *Exemple :* 14×3, c'est XIIII XIIII XIIII (1re décomposition) ou XXXXII (2e décomposition). En ce sens, le calcul arithmétique ne donne pas plus des résultats effectués que l'algèbre. Pour écrire 42 tout au long, il faudrait écrire 42 unités à la suite les unes des autres.

Note IV (page 13). — On trouvera dans la *Revue de l'Instruction publique* (1884, p. 188) une critique sérieuse et très fondée, par l'abbé Gelin, de la définition de la multiplication due à Cauchy et telle qu'elle est formulée par la plupart des auteurs belges ; Quetelet aussi, dans sa *Correspondance mathématique et physique*, la désapprouve. Celle que j'ai adoptée est celle des anciens auteurs, qui est admise par Serret, Lionnet, Bertrand, Briot, Tombeck, Gariet, etc. Voir aussi *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* par Duhamel (2e partie, p. 44).

Note V (page 18). — On rapporte, dans l'arithmétique d'*Euler*, une addition assez curieuse : supposons qu'une personne écrive un nombre de 4 chiffres, puis encore 3 nombres qui ne soient pas de plus de 4 chiffres chacun ; on pourra immédiatement écrire 3 nouveaux nombres de manière que la somme des 7 nombres forme un résultat qu'on aura fixé d'avance. *Exemple :* Supposons qu'on ait écrit le nombre 2378, puis les nombres 5478, 984, 7960 ; on indiquera la somme à obtenir $3 \times 9999 + 2378 =$

Digitized by Google

30000 — 3 + 2378 = 32375 ; et les nombres à additionner avec 2378 + 5478 + 984 + 7960 seront les compléments des 3 derniers sur 9999 ou 4521, 9015 et 2039. Toutes ces opérations peuvent se faire aisément de tête.

Note VI (page 22). — Voici une autre démonstration, par *Legendre*, du principe fondamental de la multiplication : Soit le produit $a \times b$; je dis que si le théorème est vrai pour tous les nombres a moindres que b, il l'est encore quand le facteur a est plus grand que b; en effet, soit $a = b + c$, d'où $a \times b = (b + c) \times b = b \times b + c \times b$ et $b \times a = b \times (b + c) = b \times b + b \times c$, donc si $c \times b = b \times c$, $a \times b = b \times a$. Cela posé, le théorème est *vrai pour* 1×1, donc pour 2×1, etc.

Note VII (page 22). — Les traités du moyen âge qui enseignaient la manière d'écrire avec nos chiffres actuels, supposaient que le papier ou le tableau sur lequel on écrivait, était partagé en colonnes verticales, dans lesquelles on plaçait chaque chiffre avec sa valeur de position; c'était ce qu'ils appelaient : *Abacus seu mensa Pythagorica* (abaque ou table de Pythagore). Plus tard, et par corruption, on a donné peu à peu le titre de table de Pythagore à d'autres tables de calcul, et notamment à la petite table de multiplication bien connue de tous, et dont la plupart des auteurs font honneur, à tort, au philosophe grec. Mais cette table n'a rien de commun avec l'*abacus* du moyen âge. (*Chasles.*)

Note VIII (page 25). — *Quelques méthodes abrégées de multiplication.*

I. Méthode de Berthevin au moyen des compléments. (*Éléments d'arithmétique complémentaire*, imprimerie royale de France, 1826.) — Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ les facteurs d'un produit P ; C_a et C_b les compléments de $\underline{a}$ et de $\underline{b}$ pour former une puissance de 10^n de 10 que nous appellerons le *complémentateur*.

1er *cas.* — $\underline{a} < 10^n$ et $\underline{b} < 10^n$; on aura les égalités $a = 10^n - C_a$ et $b = 10^n - C_b$; donc $P = 10^n (10^n - C_a - C_b) + C_a C_b = 10^n (a - C_b) + C_a C_b$ ou $10^n (b - C_a) + C_a C_b$.

Digitized by Google

Exemple : Soit à multiplier $a = 9989$ par $b = 9863$; 1° on écrit $\underline{a}$ à côté de $\underline{b}$ et leurs compléments au-dessus; 2° on retranche $\overline{C_a}$ de $\underline{b}$ ou C_b de $\underline{a}$ et l'on obtient la partie du quotient de l'ordre 10^n; 3° on ajoute les unités exprimées par le produit $C_a\ C_b = 1507$.

$C_a = 11 \quad C_b = 137$

9989×9863

9852

1507

$P = 9852\ 1507$

2e *cas.* — $\underline{a} > 10^n$ et $\underline{b} > 10^n$; on aura les égalités $a = 10^n + C_a$ et $b = 10^n + C_b$, d'où $P = 10^n\ (b + C_a) + C_a\ C_b$ ou $10^n\ (a + C_b) + C_a\ C_b$; on aura les unités de l'ordre 10^n en ajoutant l'un des facteurs au complément de l'autre facteur.

Exemple : Le produit $1124 \times 1008 = 1132 \times 10^n + 992 = 1132992$.

3e *cas.* — $\underline{a} < 10^n$ et $\underline{b} > 10^n$; on aura encore $P = 10^n\ (a + C_b) - C_a\ C_b$ ou $10^n\ (b - C_a) - C_a\ C_b$.

Exemple : $979 \times 1037 = 1016 \times 10^3 - 777 = 1015223$.

Remarque I. — Il arrive quelquefois que les facteurs n'ont pas le même nombre de chiffres; par exemple, $P = 99859 \times 9897$; dans ce cas on imaginera des zéros à la droite du plus petit facteur; par exemple on formera le produit $P' = 99859 \times 98970 = 9883045230$ et l'on aura P en supprimant le zéro.

Remarque II. — On pourrait facilement étendre les règles au cas où le complémentateur serait $5 = \frac{10}{2}$, $50 = \frac{100}{2}$.....

II. Méthode de A. Cauchy (*C R A*, t. XI, p. 795). — Pour multiplier deux nombres l'un par l'autre, décomposez la somme des deux facteurs en deux parties dont le produit puisse être facilement obtenu, et ajoutez au produit de ces deux parties le produit des différences entre l'une d'elles et chacun des facteurs donnés.

Exemple : 1° $P = 616 \times 609$; on peut écrire $616 + 609 = 1225 = 600 + 625$; or $616 - 600 = 16$ et $609 - 600 = 9$; donc $P = 600 \times 625 + 16 \times 9 = 37500 + 144 = 37644$.

2° $P = 9987^2$. On peut écrire $2 \times 9987 = 19974 = 10000 + 9974$; or $10000 - 9987 = 13$; donc $P = 10000 \times 9974 + 13^2 = 99740169$.

Ce procédé n'est qu'une application de l'identité $ab = mn + (a - m)\ (b - m)$ dans laquelle $a + b = m + n$.

III. Autre méthode de A. Cauchy (*C. R A.*, t. XI, p. 789). — Cette méthode consiste à former, à la suite les uns des autres, pour les réunir immédiatement, les produits de même ordre qu'on peut obtenir en multipliant un des chiffres du multiplicande par un chiffre correspondant du multiplicateur Pour rendre facile l'application de ce procédé, il propose

Digitized by Google

d'écrire sur une bande de papier mobile, au-dessus du multiplicande, le multiplicateur renversé; alors, dans chaque position du multiplicateur, on trouve placés l'un au-dessus de l'autre les chiffres correspondants des deux facteurs, c'est-à-dire les chiffres qui, pris 2 à 2, doivent fournir les produits de même ordre.

Exemple : $P = 123 \times 646$, on écrira les facteurs successivement comme suit :

321	321	321	321	321
646	646	646	646	646
1	2	3	1	
8	4	2	6	6

Le produit se présente sous la forme :

```
  1321
 66248
 ------
 79458
```

IV. Méthode arabe (*N. A. M.*, 1879, p. 260). — Dans le *Talkhy-Amali al Ilisâb* (résumé analytique des opérations de calcul d'Ibn al Banna, de Maroc), on trouve des procédés d'abréviation à l'aide desquels on obtient rapidement, dans certains cas particuliers, le produit de deux nombres entiers.

1° $11111 \times 11111 = 123454321$: on écrit le nombre des chiffres de l'un des facteurs (5) et on le flanque symétriquement, à sa gauche et à sa droite, de la suite naturelle décroissante des chiffres moindres que lui ;

2° $99999 \times 99999 = 9999800001$: on écrit le chiffre 8 et on le flanque à gauche d'autant de 9 et à droite d'autant de zéros qu'il y a de chiffres moins un dans l'un quelconque des facteurs, puis on met à droite du nombre qui en résulte le chiffre 1 ;

3° $999 \times 666 = 665334$ (un facteur est composé de chiffres tous égaux à 9, l'autre est un nombre composé de chiffres tous égaux entre eux mais différents de 9 : on fait le produit du chiffre du multiplicande par le chiffre du multiplicateur; le chiffre des unités de ce produit préliminaire sera le chiffre des unités du produit demandé; quant au chiffre des dizaines de ce même produit préliminaire, il devra être flanqué à gauche d'autant de fois le chiffre du multiplicateur qu'il y a de chiffres moins un dans l'un quelconque des facteurs proposés, et à droite d'un même nombre de chiffres tous égaux à la différence entre le chiffre 9 du multiplicande et le chiffre du multiplicateur. C'est à l'extrême droite du nombre ainsi obtenu qu'on écrira le chiffre des unités du produit préliminaire.

Digitized by Google

Il est facile de remarquer que la deuxième règle est une conséquence de la troisième.

V *Produit en ne faisant usage que des deux mains, de deux nombres, chacun plus grand que 5 et plus petit que 10.* — On a l'identité $P = ab = 10\,[(a - 5) + (b - 5)] + 5\,[5 - (a - 5)]\,[5 - (b - 5)]$.

Exemple : $P = 7 \times 9$: l'excédent de 7 sur 5 est 2 et de 9 sur 5 est 4 ; cela posé, fermez deux doigts de la main droite et quatre de la main gauche ; en additionnant les nombres des doigts fermés on a les dizaines du produit ; et en multipliant le nombre des doigts ouverts de l'une des deux mains par les doigts ouverts dans l'autre main on aura le chiffre des unités du produit.

On a aussi la formule $P = ab = 10\,[a - (10 - b)] + (10 - a)\,(10 - b)$ d'où $7 \times 9 = 10 \times (7 - 1) + 3 \times 1 = 63$; de même $7 \times 6 = 10(7 - 4) + 3 \times 4 = 42$.

VI. On peut calculer mentalement le produit de deux facteurs ayant chacun deux chiffres avec le même chiffre des dizaines et avec des chiffres d'unités simples valant ensemble 10, au moyen de l'identité $(10a + b)\,[10a + (10 - b)] = 100a\,(a + 1) + b\,(10 - b)$.

Exemple : $78 \times 72 = 5600 + 16 = 5616$.

VII. M. Thoyer, employé à la Banque de France, imagina une méthode abrégée de la multiplication qui est propre à fournir la somme des produits qu'on peut former avec les termes correspondants de deux suites composées l'une de nombres quelconques, l'autre de nombres entiers inférieurs à 100 ; ces calculs se présentent souvent dans les questions des banques, des caisses d'épargne et des autres établissements financiers. (*C R A*, t. XII, p. 242 et 941.)

VIII. La formule $ab = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2$ montre que la multiplication serait ramenée à une simple soustraction si l'on avait une table des des carrés nombres naturels.

IX. Anciennes méthodes. — On ne sait pas bien comment les anciens faisaient les multiplications. Eutochius, au vi^e siècle de notre ère, effectue toutes les multiplications indiquées dans les œuvres d'Archimède, en multipliant séparément chaque chiffre (signe numéral) du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, et ajoutant ensuite tous les résultats. Au commencement du moyen âge, on employait l'addition répétée, avec quelques simplifications ; ou bien, une table de multiplication très étendue. Ensuite on chercha, surtout en Italie, d'autres procédés plus expéditifs. En voici un que la figure explique suffisamment. Soit à multiplier 4567

Digitized by Google

par 326. On fait les additions diagonalement. Le produit écrit autour est 1488842.

2 / 4	3 / 0	3 / 6	4 / 2	2
0 / 8	1 / 0	1 / 2	1 / 4	4
1 / 2	1 / 5	1 / 8	2 / 1	8
1	4	8	8	

Ce procédé se nomme *per gelosia*. La figure simule les jalousies d'une fenêtre.

Notre procédé actuel portait ces trois noms : *per scacchero*, par échiquier ; *per baricocolo*, espèce de petits gâteaux ronds ; *per organetto*, petit orgue.

Il y avait encore les procédés : *per colonna*. On multiplie de tête tout le multiplicateur par chaque chiffre du multiplicande et on n'écrit que les unités en retenant les excédents ; de sorte qu'on obtient tout de suite le produit sans avoir recours aux produits partiels ; *per repiego*, par composition ou plutôt par décomposition en facteurs ; *per crosetta*, en croix. On additionne de tête toutes les unités, les dizaines, les centaines, etc., ce qui oblige de multiplier en croix, et on obtient le produit sur une seule ligne. Ce procédé est encore en usage dans la multiplication par approximation ; *de Fiorentini*, des Florentins. On fait la multiplication de gauche à droite ; *per spezzamento*, par morcellement. On décompose le multiplicateur par voie d'addition ; ce qui rend l'opération moins pénible. *Exemple :*

$$20 = 3 + 4 + 5 + 8$$

le produit par 6 se conclut de celui par 3 ; 8 de celui par 4 et 5 n'exige qu'une demidiation. (TARTAGLIA, *General Trattato di numeri*, libro secundo, (1546.)

Note IX (page 26). — Pour élever au carré un nombre dont le complément sur une puissance de 10 n'est pas très grand, on peut employer des méthodes abrégées analogues à celles dont on fait usage pour la multiplication.

Digitized by Google

1er *cas*. — Le nombre est inférieur au nombre rond :

$$C = 25$$

$$\begin{array}{l} 9975 \times 9975 \\ \hline 9950 \qquad \text{ou } 9975 - 25 \\ \quad\;\; 625 \text{ ou } 25^2 \\ \hline 9950^2 = 9950\ 625 \end{array}$$

2e *cas*. — Le nombre est supérieur au nombre rond :

$$C = 12$$

$$\begin{array}{l} 1012 \times 1012 \\ \hline 1024 \qquad \text{ou } 1012 + 12 \\ \quad\;\; 144 \text{ ou } 12^2 \\ \hline 1012^2 = 1024\ 144 \end{array}$$

3e *cas*. — Soit à calculer le carré de 4983 ou 5000 — 17 ; il vient $4983^2 = (5000 - 17)^2 = 5000^2 - 2 \times 5000 \times 17 + 17^2 = 5000 \times (5000 - 34) + 17^2 = 1000 \times 5 \times 4966 + 289 = 24830289$.

Voici encore une méthode pratique, très utile dans la pratique pour élever un nombre au carré ; elle est basée sur la formule $a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$; on prend pour b une valeur telle que l'un des facteurs $a + b$ ou $a - b$ est terminé par un ou plusieurs zéros. *Exemples :* $91^2 = (91 + 9)(91 - 9) + 9^2 = 100 \times 82 + 81 = 8281$; $489^2 = (489 + 11)(489 - 11) + 11^2 = 500 \times 478 + 121 = 239121$; $125^2 = (125 + 25)(125 - 25) + 25^2 = 15625$.

Pour former le cube d'un nombre N de $n + 1$ chiffres, on peut opérer comme suit. Soit, par exemple, le nombre 3214 ; on peut écrire en général :

$$N = a\,10^n + b\,10^{n-1} + c\,10^{n-2} + d\,10^{n-3} \ldots\ldots$$

$$\text{ou } N = [(a\,10^n + b\,10^{n-1}) + c\,10^{n-2}] + d\,10^{n-3}$$

$$\text{et } N^3 \text{ ou } 3214^3 = \left\{\begin{array}{ll} a^3\,10^{3n} \ldots\ldots\ldots & 27 \\ + 3\,a^2\,b\,10^{3n-1} \ldots\ldots & 54 \\ + 3\,ab^2\,10^{3n-2} \ldots\ldots & 36 \\ + b^3\,10^{3n-3} \ldots\ldots & 8 \\ + 3\,(a\,10 + b)^2\,c\,10^{3n-4} \ldots & 3072 \\ + 3\,(a\,10 + b)\,c^2\,10^{3n-5} \ldots & 96 \\ + C^3\,10^{3n-6} \ldots\ldots & 1 \\ + 3\,(a\,10^2 + b\,10 + c)^2\,d\,10^{3n-7} \ldots & 1236492 \\ + 3\,(a\,10^2 + b\,10 + c)\,d^2\,10^{3n-8} \ldots & 15408 \\ + d^3\,10^{3n-9} \ldots\ldots & 64 \end{array}\right.$$

$$32^2 \left\{\begin{array}{r} 9 \\ 12 \\ 4 \\ \hline 1024 \end{array}\right. \qquad 321^2 \left\{\begin{array}{r} 1024 \\ 64 \\ 1 \\ \hline 103041 \end{array}\right. \qquad 3214^3 = 33199964344$$

Digitized by Google

Note X (page 28). — *Changements qu'éprouvent le quotient et le reste d'une division quand le dividende et le diviseur ou l'un d'eux seulement sont rendus un certain nombre de fois plus grands ou plus petits.* (Programme de la cinquième latine.)

I. Le dividende D et le diviseur d sont rendus, tous deux, m fois plus grands.

Soit q le quotient et r le reste; on a l'égalité $dq < D < d(q+1)$, donc aussi $(dm)\,q < Dm < dm\,(q+1)$; le quotient de $Dm : dm$ est encore q; d'ailleurs $D - dq = r$, d'où $Dm - (dm)\,q = rm$ ou bien $Dm = (dm)\,q + rm$; or, $r < d$ donc $rm < dm$, donc rm est le reste qu'on obtient en divisant Dm par dm.

Conclusion. — Le quotient ne change pas et le reste est multiplié par m; la théorie est la même quand on divise les deux termes de la division par un de leurs diviseurs communs.

II. Le dividende D seul est multiplié ou divisé par un nombre entier m.

A. Le dividende D est rendu m fois plus grand.

On a $D = dq + r$, donc $Dm = d\,(qm) + rm$.

Cela posé, il peut se présenter trois cas :

1° $rm < d$; alors le quotient est qm et le reste est rm, donc le quotient et le reste sont aussi m fois plus grand; 2° $rm = d$; alors $Dm = d\,(qm+1)$; le nouveau quotient est $qm + 1$ et le reste est zéro; 3° soit $rm > d$; posons $rm = dq' + r'$, il vient $Dm = d\,(qm + q') + r'$, et comme $r' < d$, on voit que le quotient est $qm + q'$ et le reste est r'.

B. Le dividende D est rendu m fois plus petit.

On peut écrire $\frac{D}{m} = d\left(\frac{q}{m}\right) + \frac{r}{m}$, et il faut considérer les deux cas particuliers suivants :

1° $q = mq'$, d'où $\frac{D}{m} = dq' + \frac{r}{m}$; il faut que $\frac{r}{m}$ soit un nombre entier r' et alors le quotient de $\frac{D}{m} : d$ est q' et le reste est r'; 2° si $q = mq' + r'$; il vient $\frac{D}{m} = dq' + \frac{dr' + r}{m}$; or $r < d$, puis $m - r' \geqq 1$, donc $r < d\,(m - r')$, ou bien $\frac{dr' + r}{m} < d$; donc le quotient de $\frac{D}{m} : d$ est encore q' et le reste est $\frac{dr' + r}{m}$.

III. Le diviseur d seul est multiplié ou divisé par le nombre entier m.

A. Le diviseur d est rendu m fois plus grand.

On a l'égalité $D = dq + r$; donc aussi $D = dm\left(\frac{q}{m}\right) + r$, et l'on a les deux cas particuliers suivants :

1° $q = mq'$; comme $r < d$, à plus forte raison $r < dm$; donc le quotient de $D : dm$ est q' et le reste n'a pas changé; 2° $q = mq' + r'$; alors

Digitized by Google

$D = (dm)\,q' + (dr' + r)$: or $r < d$ et $m - r' \geqq 1$, donc $r < d\,(m - r')$, d'où $dr' + r < dm$, ce qui montre que le quotient est q' et le reste devient $dr' + r$.

B. Le diviseur d est rendu m fois plus petit.

On écrira $D = \frac{d}{m}\,(qm) + r$, et l'on considérera successivement les trois cas particuliers suivants :

1° $r < \frac{d}{m}$, le quotient est mq et le reste est encore r; 2° $r = \frac{d}{m}$, $D = \frac{d}{m}\,(qm + 1)$, le quotient est $qm + 1$ et le reste est zéro ; 3° $r > \frac{d}{m}$; on peut écrire $r = \frac{d}{m}\,q' + r'$; alors $D = \frac{d}{m}\,(mq + q') + r'$; le quotient est $mq + q'$ et le reste est r'.

EXERCICES

Appliquez les règles aux exemples suivants :

35 : 25, on multiplie les deux termes par 3.
25 : 6, on multiplie le dividende seulement 1° par 4 ; 2° par 6 ; 3° par 7.
50 : 6, on divise le dividende seulement par 2.
94 : 6, on divise le dividende seulement par 2.
25 : 6, on multiplie le diviseur seulement 1° par 2 ; 2° par 3.
25 : 6, on divise le diviseur seulement par 3.
26 : 6, on divise le diviseur seulement par 3.
29 : 6, on divise seulement le diviseur par 3.

Note XI (page 28). — Soit D le dividende et $d = abc$ le diviseur; enfin soit q le quotient de D par a, puis q' le quotient de q par b et q'' le quotient de q par c on aura :

$q' = c\,q'$. $q = b\,q'$, $D = a\,q = abc\,q''$ donc q'' est le quotient de $D : abc$.

Supposons qu'on ne considère que la partie entière des quotients; si l'on désigne par r, r', r'' les restes de chaque opération, on aura :

$q' = c\,q'' + r''$, $q = b\,q' + r'$, $D = aq + r = abc\,q'' + (abr'' + ar' + r)$; je vais démontrer que $abr'' + ar' + r < abc$; en effet, $r \leqq a - 1$, $r' \leqq b - 1$ et $r'' \leqq c - 1$; donc $abr'' + ar' + r \leqq abc - ab + ab - a + a - 1$ ou $abc - 1$; de sorte que q'' est la partie entière du quotient de D par abc et le reste est $abr'' + ar' + r$.

Digitized by Google

Note XII (page 29). — Soient à diviser l'un par l'autre les nombres M et N, séparons sur la droite de chacun d'eux p chiffres, et représentons par M' et M'' les parties à gauche, par M'', N'' les parties à droite, nous aurons :

$$M = M' 10^p + M'' \qquad N = N' 10^p + N''$$

D'où nous déduisons les inégalités :

$$M > M' 10^p \text{ et } < (M' + 1) 10^p \quad , \quad N < (N' + 1) 10^p \text{ et } > N' 10^p ;$$

$$\text{enfin } \frac{M}{N} > \frac{M'}{N' + 1} \text{ et } < \frac{M' + 1}{N'}$$

Si nous représentons par q le quotient de M' par N' et par R le reste, nous aurons :

$$M' = N'q + R$$

$$\text{d'où } \frac{M'}{N' + 1} = q + \frac{R - q}{N' + 1} \quad \text{et} \quad \frac{M' + 1}{N'} = q + \frac{R + 1}{N'} ;$$

$$\text{par suite } \frac{M}{N} > q + \frac{R - q}{N' + 1} \text{ et } \frac{M}{N} < q + \frac{R + 1}{N'}$$

Comme R est toujours plus petit que N', $R'' + 1$ est tout au plus égal à N' et par suite

$$\frac{M}{N} < q + 1$$

La partie entière de $\frac{M}{N}$ est donc tout au plus égale à q.

Par l'inégalité précédente, nous voyons que si $R > q$, le quotient $\frac{M}{N} > q$, donc dans ce cas, la partie entière du quotient est q.

Mais si $R < q$, la fraction $\frac{R - q}{N'}$ est négative et plus petite que 1, puisque $N' > 10$ et $q < 10$; donc $\frac{M}{N} > q$ moins une certaine fraction, et par suite la partie entière pourra être $q - 1$ ou q.

On vérifiera le quotient en divisant le dividende par ce quotient. Si le quotient trouvé est moindre que le diviseur, c'est que le quotient est trop fort et on doit le diminuer d'une unité.

Note XIII (page 31). — On ne sait pas encore bien comment les anciens faisaient les divisions; au commencement du moyen âge on employait la soustraction répétée avec quelques simplifications. Plus tard on découvrit beaucoup de règles différentes; il y avait la méthode à l'italienne briève et longue, à la portugaise, à l'espagnole, à la française briève et longue, etc. Toutes ces méthodes ne différaient pour la plupart que par la disposition des termes. (Voir l'*Arithmétique raisonnée* d'Euler.)

Digitized by Google

La méthode que nous employons actuellement est celle de *la division à l'italienne brève;* la méthode *à la française longue* se trouve exposée dans le passage du *Triparty en la science des nombres*, de *Nicolas Chuquet;* cet ouvrage fut écrit en 1484 ; il a été publié pour la première fois par *Aristide Marre*, d'après le manuscrit *Fonds français* n° 1346 de la bibliothèque nationale de Paris, dans le *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* du prince *Boncompagni*, Rome, tome XIII, 1880, p. 593.

La méthode de Nicolas Chuquet donne une idée de la manière dont on opérait de ce temps la division.

« Item qui vouldroit partir 705 par 19. Les nombres couchés ainsi qu'il appartient. On doit regarder en 7 quantes foiz 1 et en 0 quantes foiz 9 ou en 70 quantes foiz 19. Il y est contenu par 3 foiz que lon doit mettre entre les deux lignes et au dessoubz de 7. Puis dire 3 foiz 1 font 3 leuez de 7 reste 4 sus 7 puis 3 foiz 9 font 27 leuez donc de 30 reste 3 sus 0 et 3 que l'on a empruntez leuez de 4 reste 1 sus 4. En apres on doit regarder en 13 quantes fois 1 ou en 135 quantes fois 19. Il y est 7 foiz tout considere et non plus pourtant fault mettre 7 au dessoubz de 0. Puis lon doit dire 7 fois 1 font 7 leuez de 13 reste 6 puis 7 foiz 9 font 63 leuez de 65 reste 2. Et ainsi vient à la part 37 $\frac{2}{19}$. |Comme il appert en marge (1). »

16
432
705
37
19

Note XIV (page 33). — Il existe une méthode de la division qui dérive immédiatement de la règle de la multiplication que nous avons exposée dans la note VIII ; en voici la théorie :

Soit D le dividende, d le diviseur et q le quotient. Soit 10^n le complémentateur du diviseur ; celui-ci sera plus petit ou plus grand que 10^n ; soit $d < 10^n$; on peut écrire $d = 10^n - C_d$ et si l'on pose $q = 10^n - C_q$, il vient dq ou $D = 10^{2n} - 10^n (C_d + C_q) + C_d C_q$; donc $\frac{D}{10^n} = 10^n - C_d - C_q + \frac{C_d C_q}{10^n}$ ou bien $D' + \frac{D''}{10^n} = q - C_d + \frac{C_d C_q}{10^n}$, d'où $q = D' + C_d + \frac{D'' - C_d C_q}{10^n}$.

Si $D'' \geqq C_d C_q$, $q = D' + C_d$; mais si $D'' < C_d C_q$, $q < D' + C_d$.

---

(1) On trouve dans le compte rendu analytique, par M. Mansion, de l'*Histoire des mathématiques*, de Hänkel, une description très claire de la *division aurea*.

Digitized by Google

De là résulte la règle suivante que nous appliquerons à la division de 9852 1507 par 9863.

1° On sépare sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros dans le complémentateur du diviseur; 2° on augmente la partie qui reste sur la gauche du dividende, du complément du diviseur, si celui-ci est plus petit que le complémentateur, et l'on diminue la partie du dividende du complément du diviseur si celui-ci dépasse le complémentateur; on obtient ainsi le quotient ou un quotient trop fort.

1er exemple

```
            C 137
 9852'1507 | 9863
+137       |
 9989
```

quotient exact.

$11 \times 137 = 1507$

2e exemple

```
            C 11
  532 845 | 989
+ 11      |
  543
```

$543 - 5 = 538$ quotient

$457 \times 11 = 5037$

```
        845
       4182 | C 11
            | 989
            | 5
```

$989 \times 5 = 4985$

763 reste de la division.

Pour voir si le quotient n'est pas trop fort, on multiplie son complément par celui du diviseur; si le produit est égal ou inférieur à la partie qui reste à la droite du dividende, le quotient est exact; dans le cas contraire, on doit retrancher de ce produit la partie à droite du dividende et l'on divise ensuite cette différence par le diviseur, en forçant le quotient d'une unité quand on n'a pas zéro pour reste; en retranchant ce nombre du quotient présumé, on aura le véritable quotient. Cette règle doit être légèrement modifiée quand les nombres sont supérieurs au complémentateur, comme dans les cas analogues de la multiplication.

Quand un nombre est exactement divisible par 9, pour trouver le quotient de la division par 9 on peut procéder de la manière suivante: Soit le nombre 7234812; écrivez un zéro au-dessus du chiffre des unités; retranchez le chiffre des unités de *dix*; écrivez le reste au-dessus des dizaines; retranchez le chiffre des dizaines plus un du reste écrit au-dessus; écrivez le reste au-dessus du chiffre des centaines; retranchez le chiffre des centaines du reste qui est au-dessus (ici augmentez ce chiffre de 10); écrivez le reste au-dessus des mille; retranchez le chiffre des mille plus un du reste écrit au-dessus; écrivez le reste au-dessus du chiffre des dizaines de mille, etc.; le quotient demandé est le nombre supérieur dont on supprime le zéro à droite. Ce procédé, que l'on comprendra facilement, est basé sur la formule $N = 9Q = 10Q - Q$; d'où $10Q - N = Q$.

```
8038680
7234812
```

Digitized by Google

Note XV (page 34). — La division est une opération laborieuse quand les termes sont de grands nombres; il n'est donc pas étonnant que beaucoup de recherches aient été faites pour trouver des procédés abrégés; on trouvera quelques-uns de ces travaux dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (années 1845, 1854, 1855). Nous appellerons spécialement l'attention sur les règles suivantes : 1° la division abrégée que le capitaine d'artillerie Guy publia en 1845 (*C R A*. t. XIX, p. 1018 et t. XX, p. 67); 2° la division ordonnée de Fourier que le professeur Finck introduisit dans les éléments (*Traité d'arithmétique*, 1841); on en trouvera la théorie dans une note de M. Schaar (*Bulletin de l'Académie des sciences de Bruxelles*, 1851, t. XVIII) ou les *N. A. M.* (1845, p. 328 et 658; 1852, p. 50 et 148).

Nous finirons cette note en rappelant l'ouvrage *la Division réduite à une addition*, par R. Picarte, membre de la Faculté des scienes physiques et mathématiques de l'université du Chili (Paris, Mallet-Bachelier, 1860); cet ouvrage a été approuvé par l'Académie des sciences de Paris; on en trouvera une analyse dans le *Bulletin bibliographique* des *N A M*, année 1861, p. 17.

Note XVI (page 38). — Quand on effectue la division indiquée par la formule $\frac{N - a^2}{2a}$ on obtient un quotient q et un reste r; on sait que q représente le nombre entier à ajouter à la valeur relative de a pour obtenir à une unité près la racine carrée de N. Il est utile de pouvoir déterminer facilement le reste $N - (a + q)^2$.

Or $N - a^2 = {}^2aq + r$ donc $N - (a + q)^2 = r - q^2$.

Si $r = q^2$, $a + q$ est la racine exacte de N.

Si $r > q^2$, $a + q$ est la racine à une unité près par défaut.

Et si $r < q^2$, $a + q$ est la racine à une unité près par excès.

Exemples :

1° Soit à extraire la racine carrée de 199996164; la partie entière de cette racine aura 5 chiffres; $\sqrt{19999} = 141$ avec le reste 1186164 qu'on divisera par 28200; il vient $q = 42$ et $r = 1764$; or $1764 = 42^2$ donc $\sqrt{199996164} = 14142$.

2° Soit à extraire la racine carrée de 3

Calculons d'abord les 3 premières décimales en extrayant la racine carrée de 3,00 00 00; il vient $a = 1,732$; on aura les 3 chiffres suivants en divisant le reste 176000000 par 3464000; il vient $q = 050$ et

Digitized by Google

$r = 2800000 > 050^2$; donc 1.732050 est la racine carrée de 3 à un millionième par défaut; et $N - (a+q)^2 = r - q^2 = 2800000 - 050^2 = 2797500$; il sera facile, au moyen d'un division, d'obtenir encore 6 chiffres de la racine; on divisera 27975 00 00 00'00 00 00 00 par 34641 00 000000; on obtiendra ainsi $q' = 807569$ et $r' = 227100000000 > 807569$; donc 1,732050807569 est la racine à une unité près du dernier ordre par excès.

Dans l'arithmétique de *Peacock* (1791-1858), professeur à l'université de Cambridge, qui fait partie de l'*Encyclopedia Metropolitana* de Londres (1825-1826), se trouvent rapportées plusieurs règles anciennes pour l'approximation des racines carrées et cubiques.

La formule $\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$ est attribuée aux Arabes (*N A M*, 1861, p. 48, et 1870, p. 505).

On trouvera (*N A M*, 1886, p. 6) une méthode pour la $\sqrt{a^2 + x}$ sans effectuer le carré a^2.

M. Gergonne énonce une autre méthode dans une note à la fin d'un mémoire de Bobillier (*Annales*, t. XX, p. 127) : déterminez, à l'ordinaire, les *deux* premiers chiffres de la racine; carrez et retranchez. Abaissez les *deux* chiffres suivants; séparez le *dernier*; divisez la partie à gauche par le double de la racine trouvée : vous aurez le *troisième* chiffre de la racine. *Carrez ce troisième chiffre* et retranchez du reste de la division suivi du chiffre négligé. Abaissez les *quatre* chiffres suivants, séparez les deux derniers; divisez la partie à gauche par le double de la racine trouvée; vous aurez *deux* chiffres de plus. Formez le carré de cette nouvelle partie de la racine; retranchez-le du reste de la division suivi des *deux* chiffres négligés, etc. En continuant de la même manière vous obtiendrez encore *quatre* chiffres de plus, puis *huit*, puis *seize*, etc.

On peut aussi procéder par approximations successives comme suit : Soit $N = (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$; en négligeant x, on aura $x = \frac{N - a^2}{2a}$ et la racine $\sqrt{N} = a + x = a + \frac{N - a^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{N}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right)$; donc si a est une valeur approchée de $\sqrt{N}$, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right)$ sera une valeur encore plus rapprochée. Cette valeur est approchée par excès. Posons $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right)$; on pourra raisonner sur b comme sur a, en posant $N = (b - x')^2 = b^2 - 2bx' + x'^2$ et en négligeant x'^2, $x' = \frac{b^2 - N}{2b}$ et par suite $\sqrt{N} = b - \frac{b^2 - N}{2b} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{N}{b}\right)$ c'est encore une valeur par excès; en posant $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{N}{b}\right)$, on trouverait pour une nouvelle approximation $\sqrt{N} = \frac{1}{2}\left(c + \frac{N}{c}\right)$ et ainsi de suite indéfiniment.

Digitized by Google

Par exemple soit à calculer $\sqrt{3}$; la 1re approximation est $a + 1$; la 2e est $b = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = 2$; la 3e est $c = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} = 1.75$; la 4e $d = \frac{1}{2}\left(1{,}75 + \frac{3}{1{,}75}\right) = 1{,}7321$; la 5e $e = \frac{1}{2}\left(1{,}7321 + \frac{3}{1{,}7321}\right)$ et ainsi de suite.

On peut employer aussi la formule $\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{1}{2}\frac{1}{a}x - \frac{1}{8}\frac{1}{a^3}x^2 + \frac{1}{16}\frac{1}{a^5}x^3 - \frac{5}{128}\frac{1}{a^7}x^4 + \frac{7}{256}\frac{1}{a^9}x^5 - \frac{21}{1024}\frac{1}{a^{11}}x^6 + \ldots\ldots$; et en particulier si $a = 1$, $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6$.

Application : $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{100-2}{49}} = \frac{10}{7}\sqrt{1 - 0{,}02}$.

$1 =$	1	1	$= 1$
$\frac{1}{2} \times 0{,}02$	$= 0{,}01$	$\frac{1}{2} \times 0{,}02$	$= 0{,}01$
$\frac{1}{8} \times 0{,}02^2$	$= 0{,}00005$	$\frac{1}{8} \times 0{,}02^2 = (\frac{1}{2} \times 0{,}02) \times \frac{0{,}02}{4}$	$= 0{,}00005$
$\frac{1}{16} \times 0{,}02^3$	$= 0{,}0000005$	$\frac{1}{16} \times 0{,}02^3 = (\frac{1}{8} \times 0{,}02^2) \times \frac{0{,}02}{2}$	$= 0{,}0000005$
$\frac{5}{128} \times 0{,}02^4$		$\frac{5}{128} \times 0{,}02^4 = (\frac{1}{16} \times 0{,}02^3) \times \frac{5 \times 0{,}02}{8}$	$= 0{,}000000000625$
		$\frac{7}{256} \times 0{,}02^5 = (\frac{5}{128} \times 0{,}02^4) \times \frac{7 \times 0{,}02}{10}$	$= 0{,}0000000000875$
		$\frac{21}{1024} \times 0{,}02^6 = (\frac{7}{256} \times 0{,}02^5) \times \frac{3 \times 0{,}02}{4}$	$= 0{,}000000000013125$
			$0{,}0100505063388125$

Donc $\sqrt{2} = 10 \times 0{,}9899494936611875 = 1{,}414213562373125$.

Quand on peut prévoir que le complément de la racine carrée d'un nombre est assez petit, on peut aussi employer avec avantage la méthode par les compléments; soit a la racine carrée de N et supposons $a < 10^n$; on peut écrire $a = 10^n - C_a$; donc a^2 ou $N = 10^{2n} - 2\,10^n C_a + C_a^2$; faisons abstraction de C_a^2 alors $N = 10^n\,(10^n - 2C_a)$, d'où $\frac{N}{10^n} = 10^n - 2C_a$; de sorte que $\frac{N}{10^n} + 10^n = 2\,(10^n - C_a) = 2a$.

Soit, par exemple, $\sqrt{938961}$ qui aura 3 chiffres et différera peu de 10^3; séparons trois chiffres à la gauche du nombre, ce qui donne 938 et ajoutons 10^3, ce qui fait 1938; la moitié de 1938 ou 969 est la racine; nous vérifierons ce résultat en prenant le complément de 969 qui est 31; si le carré de 31 ou 961 peut être retranché de la partie 961 qui est restée à la droite du nombre proposé, c'est que 969 est bien la racine (1).

(1) Dans le bulletin de bibliographie (*N A M*, 1858, p. 68) on trouvera l'exposé des méthodes abrégées de *Cataldi*, auteur italien du commencement du XVIIe siècle.

Digitized by Google

Remarquons en passant, comme le faisait Terquem, que ces méthodes abrégées de calcul sont à l'usage de personnes qui ne calculent pas. Les calculateurs de profession emploient les logarithmes. Partout les locomotives sont préférables aux carrioles : *ars longa, vita brevis* (1).

Note XVII (page 42). — Soit $N = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, l'on a

$$\frac{N - a^3}{3a^2} = b + \frac{3ab^2 + b^3}{3a^2}$$

Supposons que la partie b à droite de la racine ait moins de chiffres que la partie a; l'on aura $(b + 1)^2 \leqq a$ ou $b^2 + 2b < a$, donc $\frac{b^2}{a} < 1 - \frac{2b}{a}$; or $R = \frac{3ab^2 + b^3}{3a^2} = \frac{b^2}{a}\left(1 + \frac{b}{3a}\right)$, donc $R < \left(1 - \frac{2b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{3a}\right)$ ou $R < 1 - \frac{b}{3a^2}(5a + 2b)$, ou bien $R < 1$.

Hutton donne la règle d'approximation suivante pour l'extraction de la racine cubique : soit A un cube donné, a une racine cubique approchée et x la racine cubique cherchée; on aura la proportion $A + 2a^3 : a^3 + 2A = a : x$.

Exemple : Soit $A = 21035{,}8$ et $a = 27$ d'où $a^3 = 19613$; il vient $x = \frac{27 \cdot 19613 + 42071{,}6}{21035{,}8 + 39226} = 27{,}6047$.

On peut employer aussi la formule :

$$\sqrt[3]{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 \pm \frac{22}{729}x^5 - \frac{154}{6561}x^6 \pm \ldots$$

analogue à celle qui a été donnée pour la racine carrée (note XVI).

Application : $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{125 + 3}{64}} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1 + 0{,}024} = 1{,}2599210499\ldots$

Note XVIII (page 44). — Euclide s'est, l'un des premiers, occupés des nombres premiers. Tous les nombres pairs, à l'exception de 2, se trouvent d'avance exclus de la série des nombres premiers, là il n'y a aucune difficulté; les nombres pairs étant tous faciles à reconnaître; mais il n'en est pas de même des nombres impairs parmi lesquels il y en a qui ne sont pas premiers; de sorte que la suite naturelle des nombres

(1) Les tables de *Crelle* (1857) donnant les produits tout faits de trois chiffres par trois chiffres sont d'une commodité extrême.

Digitized by Google

impairs est un mélange de nombres premiers et de nombres décomposables en facteurs; c'est pour faire le triage ou pour séparer les nombres premiers de ceux qui ne le sont pas qu'Eratosthène proposa, sous le nom de *crible* (κόσκινος), une méthode directe.

Il y a une méthode qui ne diffère pas essentiellement du crible. Pour trouver tous les nombres premiers de 1 à n^2 on écrit la progression arithmétique q^2, $q^2 + 2q$, $q^2 + 4q$.....; on fait successivement $q = 3, 5, 7$.....; en poussant chaque progression jusqu'au terme le plus rapproché de n^2 : les nombres impairs non renfermés dans ces suites sont les nombres premiers cherchés (*N A M.*, années 1846, p. 609.)

Voici une règle pour reconnaître si un nombre N est premier : il faut lui ajouter successivement les carrés de tous les nombres naturels depuis 1 à $\frac{N-1}{2}$, et si aucune des sommes à l'exception de la dernière est un carré, on est assuré que N est un nombre premier. (Voir le dictionnaire de Montferrier, article *premier*.)

L'opération qui sert à obtenir le crible d'Eratosthène fournit un moyen commode d'étudier les nombres premiers au moyen de certaines suites que Alph. de Polignac a appelées *suites diatomiques* (*N A M*, 1849, page 423).

Une table très connue des nombres premiers est intitulée : *Cribum arithmeticum, sive tabula continens numeros primos, etc., confecit Ladislaus Chernac* (Deventer, 1811); elle va jusqu'à 1020000. *Burckhardt* l'a continuée dans un ouvrage intitulé : *Table des diviseurs pour tous les nombres* de 1020000 à 20280000 (Paris, 1814). Plus tard encore, des tables ont été calculées par lui pour le 3e million. *Dase* et *James Glaisher* sont allés jusqu'au 10e million. De ces tables il résulte que :

De 1 à	100	il y a	25	nombres	premiers.
1 à	1.000	»	164	»	»
1 à	10,000	»	1,230	»	»
Enfin jusqu'à	100,000	»	78,493	»	»

Legendre a donné une formule pour calculer la quotité des nombres premiers de 1 à n; c'est $\frac{n}{\log n - 1,08366}$: le log. doit être naturel.

Il existe une curieuse application faite par M. *Brocard* de cette formule (*N A M.*, 1876, p. 330, avec la rectification par M. *Lionnet*, p. 473).

On peut démontrer que *la suite des nombres premiers est illimitée*. Soit N un nombre premier; multiplions entre eux tous les nombres premiers 1, 2, 3, 5... jusqu'à N inclusivement, et soit P le produit; alors $P + 1 > N$ est un nombre premier et alors il y a un nombre premier plus grand

Digitized by Google

que N, ou $P + 1$ n'est pas un nombre premier (1). Si $P + 1$ n'est pas premier il aura un diviseur premier; or ce diviseur est nécessairement plus grand que N, car tout nombre premier moindre que N entre comme facteur dans le produit P et divisant P il ne peut diviser $P + 1$. Il résulte de ce raisonnement que, dans les deux hypothèses, il y a un nombre premier plus grand que N.

On peut démontrer que tout nombre premier autre que 2 et 3 est un multiple de 6, augmenté ou diminué d'une unité; mais la réciproque n'est pas vraie. *Exemple:* $26 = 6 \times 4 + 1$; $35 = 6 \times 6 - 1$; $49 = 6 \times 8 + 1$.

On ne connaît pas de formule propre à ne donner que des nombres premiers. Il existe seulement des formules qui en donnent plus ou moins; telles sont :

1° $n^2 + n + 7$ dont les 17 premiers sont des nombres premiers ;

2° $2n + 29$ dont les 29 premiers sont des nombres premiers;

3° $n^2 + n + 4$ dont les 41 premiers sont des nombres premiers.

Voici encore une remarque fort curieuse sur la formation des nombres premiers (*Crelle*, 1833, p. 201). Soit la suite naturelle des nombres premiers, l'unité omise 2, 3, 5, 7... p_n, le dernier nombre indiquant le n^e terme de cette suite on aura pour :

n impair $\quad p_n = 1 \pm 2 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \ldots\ldots - p_{n-2} + 2p_{n-1}$.

n pair $\quad p_n = 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \ldots\ldots \qquad + p_{n-2} + p_{n-1}$.

Exemples :

$n = 6 \qquad 13 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11$.

$n = 7 \qquad 17 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 2 \times 13$.

Cette loi a été vérifiée jusqu'au nombre premier 499.

Il existe aussi une formule pour exprimer combien il y a de nombres premiers avec un nombre donné N et pas supérieurs à N; cette formule s'établit au moyen de la théorie des congruences. (Voir le *Cours d'Algèbre supérieure* de J.-A. Serret, tome II. Paris, Gauthier-Villars, 1866). Si $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ (a, b, c... étant des nombres premiers) et en désignant $\varphi(N)$ le nombre dont il est question, il vient :

---

(1) $P + 1$ n'est pas nécessairement un nombre premier; en effet, si l'on fait successivement les produits $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $6 \times 5 = 30$, $30 \times 7 = 210$, $210 \times 11 = 2310$, $2310 \times 13 = 30030$. et puis si l'on ajoute 1 à chaque produit on a la suite des valeurs de $P + 1$. 3, 7, 31, 211, 2311, 30031 . les 5 premières valeurs sont des nombres premiers; mais 30031 ne l'est pas car $30031 = 509 \times 59$

Digitized by Google

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots\ldots$$

Cette formule peut être aussi établie directement. (Voir le *Cours de Méthodologie mathématique*, par M. Dauge, professeur à l'université de Gand.)

On trouvera des remarques intéressantes sur les nombres premiers par *Lebesgue* dans les *N A M*, 1856, p. 130 et 236.

Note XIX (page 47). — Sur la limite du nombre des divisions à effectuer dans la recherche du plus grand commun diviseur, voir *N A M*, année 1845, p. 71, 568 et 617 et *C M P*, t. IX p 483.

Lemme. — Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, chaque reste est toujours moindre que la moitié de celui qui le précède de deux rangs.

Démonstration. — Soient R_1, R_2, R_3 trois restes successifs; il faut prouver qu'on a $R_3 < \frac{R_1}{2}$.

En effet, si R_2 est déjà plus petit que $\frac{R_1}{2}$ à plus forte raison $R_3 < \frac{R_1}{2}$ car $R_3 < R_2$; si $R_2 > \frac{R_1}{2}$, en divisant R_1 par R_2 on aura pour quotient *un* et pour reste $R_3 = R_1 - R_2$; or $R_2 > \frac{R_1}{2}$ donc $R_3 = R_1 - R_2 < \frac{R_1}{2}$.

Théorème. — On a une limite des divisions à effectuer dans la recherche du plus grand commun diviseur : 1° en prenant le double du rang de la puissance de 2 immédiatement supérieure au plus petit des deux nombres; ou même le rang de cette puissance de 2 quand on choisit convenablement les restes.

Démonstration — Soient A et B les deux nombres, A étant plus grand que B; et R_1, R_2, ... R_{2n} les restes de l'opération; on a :

$$A > B > R_1 > R_2 \ldots > R_n \ldots > R_{2n}$$

ou bien encore, d'après le lemme précédent

$$2R_2 < B,\ 2R_4 < R_2 \ldots\ 2R_{2n} < R_{2n-2}$$

Multipliant membre à membre ces inégalités

$$2^n R_{2n} < B \text{ et par suite } R_{2n} < \frac{B}{2^n}$$

Or, tous les restes doivent être entiers, donc $B > 2^n$, donc le dernier reste ne sera pas de rang 2^n, par suite on n'aura pas à faire 2^n divisions.

On peut toujours avoir des restes moindres que la moitié du reste précédent en faisant usage d'un principe connu (123); de cette façon on peut écrire.

Digitized by Google

$2R_1 < B$, $2R_2 < R_1$, $2R_3 < R_2 \ldots$ $2R_n < R_{n-1}$; en multipliant ces inégalités membre à membre $2^n R_n < B$ ou $R_n < \frac{B}{2^n}$.

Or $B > 2^n$ sinon R_n ne serait pas entier ; donc on n'aura pas le reste de rang n.

On connait aussi le *théorème de Lamé :* dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres *la limite des divisions est* $5n$, n représentant le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres. (*C R A*. t. XIX, p. 867) ; ensuite la limite fournie par *Binel* (*J. L.*, t. VI, et *C R A*, t. XIX, p. 937) ; enfin on pourra lire une note de *Gros* (*C R A*, t. XIX. p. 1040).

Note XX (page 49). — Euclide a démontré de la manière suivante que *le produit de deux nombres premiers avec un 3e est premier avec ce 3e nombre.* (Prop. 21, 23, 25 et 26 du VIIe livre.) :

1° Si $\frac{a}{b}$ est la plus simple des fractions équivalentes à une fraction déterminée $\frac{p}{q}$; a sera un diviseur de p et b un diviseur de q.

En effet, si a est un diviseur de p, on aura $p = ma$ (m étant entier) ; mais $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = ma$ d'où $q = mb$; donc b sera aussi un diviseur de q.

Si a n'est pas un diviseur de p, divisons p par a et soient m le quotient et a' le reste ; nous aurons $p = ma + a'$, d'où $\frac{q}{b} = \frac{p}{a} = m + \frac{a'}{a}$; or la fraction $\frac{a'}{a}$ étant inférieure à l'unité, il est clair qu'en divisant q par b on obtient m pour quotient entier avec un reste $b' < b$, d'où $\frac{q}{b} = m + \frac{b'}{b}$; donc aussi $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ ou $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = \frac{p}{q}$; on trouverait donc une fraction équivalente à $\frac{p}{q}$ et plus simple que $\frac{a}{b}$.

2° Si p et q sont deux nombres premiers entre eux, $\frac{p}{q}$ sera la plus simple de toutes les fractions ayant même valeur. En effet, si la plus simple était une autre fraction $\frac{a}{b}$, a serait un diviseur de p et b ou diviseur de q ; et l'on aurait $p = ma$, $q = mb$, m étant un entier supérieur à l'unité ; par conséquent, p et q auraient un facteur commun m.

3° Si b est premier avec a, b sera premier avec tout nombre c diviseur de a. En effet, si b et c avaient un diviseur commun d, ce facteur diviserait exactement a qui est un multiple de c : on aurait donc $b = md$, $a = nd$ et d serait un diviseur commun de a et b.

4° Si a et b sont premiers avec c, leur produit $ab = p$ sera aussi premier avec c.

Digitized by Google

Démonstration. — Supposons que p et c aient un diviseur commun q; a, premier avec c, sera premier avec q diviseur de c, et d'ailleurs, on aura $p = mq$, m étant entier, ou $ab = mq$; d'où $\frac{a}{q} = \frac{m}{b}$; donc $\frac{a}{q}$ sera la plus simple des fractions équivalentes à $\frac{m}{n}$; donc q sera un diviseur de b. Ainsi b et c auraient un diviseur commun q, tandis qu'ils sont donnés comme premiers entre eux.

Note XXI, (page 54). — Dans un ouvrage publié en 1854 par le professeur Émile Jacoby, Henri *Mondeux* surnommé le pâtre calculateur de la Touraine (né à Veuvy-le-Roi près de Tours le 22 juin 1826, mort vers 1862) donne les caractères de divisibilité par tous les nombres de 1 à 50 Par exemple pour reconnaître si un nombre est divisible par 19, on double le premier chiffre à droite du nombre considéré, puis on ajoute le second chiffre et l'on double le résultat; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les chiffres du nombre, en ayant soin de retrancher 19 ou ses multiples chaque fois qu'ils sont contenus dans un résultat; si le reste est 0, le nombre est divisible par 19; et si le reste n'est pas 0, on a le reste de la division en prenant la moitié du résultat final autant de fois moins un qu'il y a de chiffres dans le nombre donné; mais quand le nombre est impair on prend la plus petite moitié et l'on ajoute 10 (1).

---

(1) Nous inscrirons à côté du nom d'Henri Mondeux celui d'un autre calculateur, *Dahse*, de Hambourg qui trouva de tête la valeur de π avec 200 décimales d'après une formule qui lui avait été fournie; il calcula ensuite de tête une table de logarithmes naturels de 1 à 105000 avec 6 décimales; nous citerons aussi *Grandmange*, né à Epinal (1835), sans bras et sans jambes et qui résolvait de tête des opérations très compliquées d'arithmétique et d'algèbre; enfin Vito *Mangiamele* qui fut présenté à l'âge de 10 ans (1837), à l'Académie des sciences de Paris. Arago lui posa les questions suivantes: quelle est la racine cubique de 3796416? L'enfant, au bout d'une demi-minute, répondit 156; quel est le nombre qui satisfait à la condition que son cube, plus 5 fois son carré, est égal à 42 fois ce nombre augmenté de 40. (Equation $x^3 + 5x^2 \quad 42x - 40 = 0$)? En moins d'une minute Vito répondit que 5 satisfaisait à la condition; la 3e question revenait à chercher la solution de l'équation $x^5 - 4x - 16779 = 0$; après s'être trompé une 1re fois, le prodige donna 7 pour solution; il trouva enfin en très peu de temps que 7 était la racine 10e de 282475249 (*C R. A.*, tome IV. p. 978). Enfin l'Académie de Paris, en 1845, eut encore à s'occuper d'un enfant de 6 1/2 ans nommé *Prolongeau*, chez lequel elle constata une singulière aptitude pour le calcul; le dernier est devenu un bon professeur de mathématiques. Enfin, en 1812 et 1813, deux jeunes américains, Zerah Colburn et Georges Bidder étonnèrent les savants par leur puissance pour le calcul mental: Colburn se distinguait par sa facilité pour l'extraction des racines et la décomposition des nombres. Il décrivit sa méthodes dans un livre: *A memoir of Zerah Colburn written by himself.* (*Springfeld* 1833).

Digitized by Google

On s'est beaucoup occupé de la divisibilité des nombres ; voici quelques méthodes pour établir, d'une manière générale, la divisibilité par quelques diviseurs.

I. Tout nombre N écrit dans la base B est divisible par D, si l'on a les expressions entières $\frac{a + bR + cR^2 + \ldots}{D}$ ou $\frac{a + bR + cR^2 + \ldots}{D}$; a, b, c... sont les chiffres du nombre N à partir des unités du 1er ordre et R, R', R''... les restes successifs de la division de B, B^2... par D.

Démonstration. — Soit $B = DQ + R$, $B^2 = DQ' + R'$, $B^3 = DQ'' + R''$... d'où $N = D + a + bR + cR' + dR'' + \ldots$..

On a aussi $B = DQ + R$, $B^2 = \dot{D} + R^2$, $B^3 = \dot{D} + R^3 + \ldots$ (1); donc $N = \dot{D} + a + bR + cR^2 + \ldots$..

De ces formules on déduit immédiatement les règles suivantes :

1° Un nombre est divisible par 2 ou par 5 suivant que le chiffre des unités simples est divisible par 2 ou par 5 (on pose $B = 10$).

2° Un nombre est divisible par 3 ou 9 suivant que la somme des chiffres est divisible par 3 ou 9 (on pose $B = 10$)

3° Un nombre est divisible par 4 ou 25 suivant que la tranche des deux premiers chiffres à droite est divisible par 4 ou 25 (on pose $B = 100$).

4° Un nombre est divisible par 8 ou 125 suivant que la tranche des trois premiers chiffres à droite est divisible par 8 ou par 125 (on pose $B = 1000$).

5° Un nombre est divisible par 37 ou 27 suivant que la somme des ordres ternaires est divisible par 37 ou 27, (on pose $B = 1000$).

6° Un nombre est divisible par 7, 11 ou 13 suivant que la différence entre la somme des ordres ternaires de rangs impairs et celle de rangs pairs est divisible par 7, 11 ou 13 (on pose $B = 1000$).

II. M. *Loir* a donné une règle très simple pour le caractère de divisibilité par un nombre quelconque ; la voici : Soit N le nombre à diviser, P un nombre premier et $\dot{P}$ un de ses multiples : soit $D_1 = \frac{N - a}{10} - a\frac{\dot{P} - 1}{10}$, $D_2 = \frac{D_1 - a'}{10} - a'\frac{\dot{P} - 1}{10}$, $D_3 = \frac{D_2 - a''}{10} - a''\frac{\dot{P} - 1}{10}$... a, a', a''... étant le chiffre des unités de N, D_1, D_2... ; si l'on trouve que l'une des différences est divisible par P ou bien que la dernière soit P ou égale à zéro, le nombre N sera divisible par P.

---

(1) On sait que $\frac{B^m - R^m}{B - R} = D$ (nombre entier); donc $B^m - R^m = \dot{D}$ et $B^m = \dot{D}(B - R) + R^m$; par conséquent si $B - R = \dot{D}$, $B^n = \dot{D} + R^m$.

Digitized by Google

En effet, on a $10\,D_1 = N - a\,P$; donc si $N = P$, $10\,D_1 = P$; on trouverait la même chose pour D_2 par rapport à D, et ainsi de suite. Réciproquement si $D_1 = P$. $N = 10\,D_1 + aP = P$.

Pour rendre les calculs plus simples, on choisira le plus petit des multiples du nombre premier, ayant l'unité pour chiffre de ses unités.

Exemples : Pour 7 le m. m. est 3×7 ou 21 ; pour 13 c'est 91, pour 17 c'est 51 : pour 31 c'est 31.

Application. — Examinons si le nombre $N = 230529299$ est divisible par 7, 13, 17, 31 et 59.

TABLEAU DES CALCULS

D	7 $\frac{P-1}{10}=2$	13 $\frac{P-1}{10}=9$	17 $\frac{P-1}{10}=5$	31 $\frac{P-1}{10}=3$	59 $\frac{P-1}{10}=53$
	230529299 18	230529299 81	230529299 45	230529299 27	230529299 477
D_1	911 2	848 72	2884 20	902 6	2452 106
D_2	289 18	212 18	5268 40	284 12	5319 477
D_3	510 0	503 27	30486 30	516 18	30036 318
D_4	051 2	3023 27	3018 40	3033 9	2685 265
D_5	303 6	2275 45	2261 5	294 12	2003 159
D_6	224 8	182 18	221 5	217 21	41
D_7	14	0	17	0	

Le nombre est divisible par 7, 13, 17 et 31 : il n'est pas divisible par 59. (Longchamps et Lévy, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1888, p. 121, 241 et 265.)

III. On peut établir des règles particulières pour les diviseurs premiers ayant *un* pour le chiffre des unités ; par exemple soit à chercher le caractère de divisibilité par 191 ; représentons par a la valeur absolue des unités simples et par b celle des dizaines d'un nombre N; nous aurons $N = 10b + a = 10b - 190a + 191a = 10\,(b - 19a) + 191a$; donc si $b - 19a$ est divisible par 191, N est aussi divisible par 191.

Digitized by Google

Cette méthode peut être appliquée pour les diviseurs 11, 31, 41...; elle peut même être étendue à des nombres premiers dont le chiffre des unités n'est pas *un* (*N A M.*, 1871, p. 104) (1).

IV. Voici une autre méthode d'après *Bouniakowsky*. (*N A M.*, 1859, p. 168.)

Soit un nombre N, D un diviseur entier quelconque, n un autre nombre entier arbitraire; soient q_1 et r_1 le quotient et le reste de la division de N par $D + n$; on aura $N = (D + n)\, q_1 + r_1$; ensuite en divisant nq_1 puis nq_2 ... par $D+n$, on trouvera successivement $nq_1 = (D+n)\, q_2 + r_2$, $nq_2 = (D + n)\, q_3 + r_3$ ..., $nq_{m-2} = (D + n)\, q_{m-1} + r_{m-1}$ enfin $nq_{m-1} = (D + n)\, q_m + r_m$.

En additionnant ces égalités membre à membre et réduisant $N = (q_1 + q_2 + \ldots + q_m)\, D + (r_1 + r_2 + \ldots + r_m + nq_m)$.

Ou plus simplement $N = D + R$; et dans cette formule $R = r_1 + r_2 + \ldots + r_m + nq_m$.

Si $R < D$, R est le reste de la division de N par D; si $R > D$ mais $R < D + n$, on divise R par D et le reste R' sera le reste de $N : D$; si $R > D + n$; on opère sur R comme sur N et l'on aura $R = D + R'$ et $N = D + R'$ et ainsi de suite.

Exemples : 1° soit $D = 9$; on posera $n = 1$, d'où $D + n = 10$; q_1 représentera les dizaines de N et r_1 est le chiffre des unités simples; q_2 représente les centaines de N et r_2 est le chiffre des dizaines, etc.; donc R = la somme des chiffres du nombre, d'où la règle ordinaire pour le caractère de divisibilité par 9.

2° Soit à chercher le reste de la division de 3678912 par 989; on posera $D = 989$ et $n = 11$, d'où $D + n = 10^3$.

$$\left.\begin{array}{lll} & q_1 = 3678 & r_1 = 912 \\ & q_2 = 40 & r_2 = 458 \\ nq_1 = 40458 & & r_3 = 440 \\ nq_2 = 440 & & R = 1810 = 989 + 821 \end{array}\right\} \text{le reste cherché est 821}$$

V *Caractère de divisibilité par* 7. — Soit un nombre N, a la valeur absolue des unités simples et b celle des dizaines; il vient $N = 10b + a = 10\,(b - 2a) + 21a$; donc N sera divisible par 7 si $b - 2a$ est divisible par 7; de là résulte le procédé suivant: Soit $N = 38059$; $b - 2a = 3805 - 18 = 3787$; N sera divisible par 7 si 3987 est divisible par 7; on peut raisonner sur 3787 comme sur 38059, et l'on

(1) Nous engageons nos lecteurs à lire une note de M Badoureau, ingénieur des mines, sur le caractère de divisibilité par 19. (*N A M.*, 1879, p. 35.)

Digitized by Google

trouve que la condition de divisibilité exige que $378 - 14 = 364$ soit divisible par 7 ; puis $36 - 8 = 28$. Ce nombre étant divisible par 7 on est certain que 38059 est aussi un nombre divisible par 7.

On voit d'ailleurs qu'on peut simplifier les opérations en retranchant 7 de tous les chiffres qui surpassent ce diviseur. (Voir les *Leçons de méthodogie mathématique*. par Mr F. Dauge, professeur à l'Université de Gand).

VI. *Cousinery* a publié une note sur les caractères de divisibilité d'un nombre quelconque par chacun des nombres premiers compris entre 0 et 102 (*C R A.*, t. XII. p. 692).

VII Décomposons un nombre N en tranches de m chiffres chacune; représentons respectivement par a, b, c, d... la 1re, 2e, 3e, 4e... tranche à partir de la droite : on peut écrire $N = a + 10^m b + 10^{2m} c + 10^{3m} d... = a + 10^m (b + 10^m c + 10^{2m} d + ...) = [b (10^m - 1) + c (10^{2m} - 1) + d (10^{3m} - 1) + ...] + [a + b + c + d...] = [b (10^m + 1) + c (10^{2m} - 1) + d (10^{3m} + 1) + ...] + [a - b + c - d + ...]$. Il résulte de ces formules :

1° Que tout nombre est divisible par un facteur de 10^m quand le nombre formé par les m chiffres à droite est divisible par ce facteur ; 2° que tout nombre est divisible par un facteur de $10^m - 1$ quand la somme des tranches de m chiffres, à partir de la droite est divisible par ce facteur ; 3° que tout nombre est divisible par un facteur de $10^m + 1$ quand la différence entre la somme des tranches de rang impair et celle des tranches de rang pair est divisible par ce facteur.

Ces règles donnent immédiatement les caractères de divisibilité suivants : 1° par 2, 5, 4, 25, 8, 125..... ; 2° par 3, 9, 11, 99, 37, 101,... 3° par 11, 101, 7, 13, 73, 137 ($10^4 + 1 = 73 \times 137$)...

VIII. Soit le nombre $N = a + 10b + 10^2 c + 10^3 d + .. = 10(b + 10c + 10^2 d .. - ma) + a (m10 + 1) = 10 (b + 10c + 10^3 d... + ma) - a (m.10 - 1)$; ce qui fournit aussi une règle très simple dans la pratique pour trouver les caractères de divisibilité par les diviseurs de $m10 \pm 1$. *Exemple* par 11, 9, 7, 19, 31, 29.....

Appliquons par exemple le caractère de divisibilité de $29 = 3.10 - 1$ à 108489 ; on supprime le chiffre des unités simples ; $10848 + 3.9 = 10875$; on supprime le chiffre 5, $1087 + 3\ 5 = 1102$; on supprime le 2, $110 + 6 = 116$; on supprime le chiffre 6, $11 + 3.6 = 29$: donc 108489 est divisible par 29.

IX. Nous finirons cette note par quelques formules générales :

1° *Caractère de divisibilité par* $B - \alpha$. — Soit le nombre $N = a + bB + cB^2 + dB^3 + eB^4 + ...$; on peut écrire :

Digitized by Google

$$N = \begin{cases} b(B-\alpha) + c(B^2-\alpha^2) + d(B^3-\alpha^3) + \ldots\ldots \\ a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots \end{cases}$$

Or $B-\alpha$, $B^2-\alpha^2$... sont des expressions divisibles par $B-\alpha$, donc N est divisible par $B-\alpha$ si $a+b\alpha+c\alpha^2+\ldots$ est divisible par $B-\alpha$; en particulier si $\alpha=1$, le nombre N est divisible par $B-1$ si la somme des chiffres du nombre N est un multiple de $B-1$.

2° *Caractère de divisibilité par* B + α. On peut écrire :

$$N = \begin{cases} b(B+\alpha) + c(B^2-\alpha^2) + d(B^3+\alpha^3) + \ldots\ldots \\ a - b\alpha + c\alpha^2 - d\alpha^3 + \ldots\ldots \end{cases}$$

En général $B^{2n+1}+\alpha^{2n+1}$ et $B^{2n}-\alpha^{2n}$ sont des expressions divisibles par $B+\alpha$; donc N est divisible par $B+\alpha$ si $a-b\alpha+c\alpha^2-d\alpha^3+\ldots$ est divisible par $B+\alpha$; en particulier si $\alpha=1$, un nombre est divisible par $B+1$ si la différence entre la somme de ses chiffres de rangs impairs et celle de ses chiffres de rangs pairs, à partir de la droite, est 0 ou un multiple de $B+1$.

3° *Caractère de divisibilité par* $B^n \pm r$ (1).

Si l'on pose $B^n = B'$, la question est ramenée au caractère de divisibilité par $B' \pm r$ qui vient d'être examiné; seulement il faudra partager le nombre N en tranches de n chiffres à partir de la droite : la 1re tranche $\underline{a}$ exprimera en valeur absolue le chiffre des unités du 1er ordre; puis la 2e tranche $\underline{b}$, le chiffre des unités du 2e ordre et ainsi de suite. On peut aussi raisonner comme suit :

Considérons d'abord le cas ou r est premier avec B.

On peut écrire $N = a + bB^n + cB^{2n} + dB^{3n} + \ldots\ldots$; d'où $Nr = B^n[(b + cB^n + dB^{2n} + \ldots\ldots)\, r + a] - a(B^n - r) = B^n N' - a(B^n r)$; ou bien $Nr = B^n[b + cB^n + dB^{2n} + \ldots)\, r - a] + a(B^n + r) = B^n N'' + a(B^n + r)$. r est premier avec B, donc avec B^n et avec $B^n \pm r$: de sorte que N sera divisible par $B^n \pm r$ suivant que N' sera divisible par $B^n - r$ ou N'' par $B^n + r$.

Exemple : Soit le nombre 147731 ; il s'agit de s'assurer s'il est divisible par $97 = 10^2 - 3$: nous supprimons la tranche 31 des deux premiers chiffres à droite. nous multiplions le reste du nombre par 3 et nous ajoutons la première tranche $a = 31$; nous opérons sur le résultat 4462 comme sur le nombre proposé et ainsi de suite; le dernier résultat est 97 divisible par le diviseur essayé 97; donc le nombre est divisible par 97.

147731
4462
194
97

(1) Cette question se trouve au programme de la seconde scientifique.

Digitized by Google

Si r n'est pas premier avec B, il ne le sera pas avec $B^n \pm r$ et il sera plus simple de décomposer $B^n \pm r$ en ses facteurs et d'appliquer les caractères de divisibilité de chacun des facteurs.

Enfin on peut encore raisonner comme suit : On démontre en algèbre que si $a - b = D$, $a^m - b^m = \dot{D}$; puis si $a + b = D$, $a^m + b^m = \dot{D}$ si m est un nombre impair et $a^m - b^m = \dot{D}$ si m est un nombre pair.

Cela posé, posons $B^n - r = D$; il vient $B^{mn} - r^m = \dot{D}$; donc $N = \dot{D} + a + br + cr^2 + \ldots.)$; puis posons $B^n + r = D'$ alors $B^{mn} + r^m = \dot{D}'$ si m est un nombre impair et $B^{mn} - r^m = \dot{D}'$ si m est un nombre pair ; on peut donc écrire :

$N = \dot{D} + (a - br + cr^2 \ldots.)$. Si m est un nombre impair, et $B = \dot{D} + (a - br^2 + cr^4 - \ldots.) = \dot{D} + (a - br' + cr'^2 - \ldots)$ en posant $r' = r^2$.

Comme application on pourra trouver facilement les caractères de divisibilité par $99 = 10^2 - 1$, $98 = 10^2 - 2, \ldots, 101 = 10^2 + 1$, $102 = 10^2 + 2, \ldots..$

X. Voici une dernière formule qui fournit certains caractères de divisibilité : posons $N = 1000q + a$; et soit $xyzu$ un produit des facteurs x, y, z, u tel que $xyzu$ soit de la forme $1000\,k + 1$; il vient $N - axyzu = 1000\,(q - ak)$, de sorte que N et $q - ak$ seront simultanément divisibles ou non divisibles par les nombres x, y, z, u. On peut appliquer cette règle pour déterminer les caractères de divisibilité par 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc. Car $7.11.13 = 1001$, $9.17.19.43 = 125001$, $3.23.29 = 2001$, $9.11.29.31 = 89001$, $7.37.139 = 36001$, $3\ 11.17.41 = 23001$, etc

---

Note XXII (page 55).— « Les nombreux exemples que l'on pourrait citer d'erreurs commises quelquefois par des calculateurs fort habiles, dans la réduction des formules en nombres, doivent faire rechercher avec soin les moyens de vérifier l'exactitude des résultats numériques auxquels on se trouve conduit par une suite d'opérations déterminées. Or, pour que l'on puisse offrir le résultat d'un calcul comme digne d'être adopté avec confiance, ce que l'on doit faire ce n'est pas de recommencer deux fois le même calcul en suivant la même route, attendu qu'il est assez naturel que l'on retombe dans une erreur déjà commise ; c'est au contraire de tout disposer de manière que, par deux systèmes d'opérations fort distinctes, on doive se trouver ramené à des résultats identiques. C'est par ces mots que débute une note de A. Cauchy (*C R A*, t. XI, p. 789) consacrée à une méthode nouvelle pour vérifier les opérations fondamentales.

Digitized by Google

Elle consiste à former, pour l'addition, la soustraction ou la multiplication, la somme, la différence ou le produit de ceux qu'on obtiendrait si, dans chaque nombre, les divers chiffres étaient considérés comme représentant non plus des unités de divers ordres, mais des unités du même ordre Cette méthode générale sera élucidée au moyen des exemples suivants :

I. *Addition.* — Après avoir fait l'addition en ayant soin d'écrire les reports sur une ligne au-dessus de la somme, on fait la somme des chiffres de chaque terme et de la ligne des reports : en additionnant ces résultats on doit obtenir la somme des chiffres du total à vérifier augmentée d'autant de dizaines qu'il y a d'unités dans le chiffre des reports.

	19857 . .	50
	20348 . .	17
	51734 . .	18
	17219 . .	20
Reports	1212 . .	6
Total	89158 . .	91

II. *Soustraction.* — Pour faire la preuve, on ajoute, à la somme des chiffres du nombre supérieur, autant de dizaines qu'on a ajouté de fois 10 aux chiffres du nombre supérieur pour rendre possible la soustraction ; et l'on ajoute tout autant d'unités simples à la somme des chiffres du nombre inférieur ; la différence des deux résultats doit être égale à la somme des chiffres du reste.

	278910 . .	57
	195523 . .	28
Reste	83387 . .	29

III. *Multiplication.* — Cauchy applique sa méthode à la multiplication effectuée d'après la règle indiquée dans la note VIII.

Multiplication		*Preuve*
	321 . .	6
	646 . .	16
	1321 . .	7
	66248 . .	26
Produit	79458 . .	96 = 6 × 16

La disposition du calcul indique suffisamment la marche à suivre ; d'ailleurs pour de plus amples renseignements je renvoie à la note même de A. Cauchy. (*C. R A.*, t. XI, p. 795)

Note XXIII (page 57). — Les opérations qu'on effectue habituellement pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers sont longues et pénibles, puisque l'on est obligé de faire exactement les divisions de ce nombre, souvent très grand, par une série de diviseurs qu'on essaie successivement. On trouvera dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de Gérono et Brisse (1875, p. 523) une remarque d'Édouard Lucas à l'aide de laquelle on peut abréger le calcul d'une manière notable.

Digitized by Google

On consultera également avec fruit un extrait des comptes rendus de l'Académie des sciences (1878) sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n \pm 1$ par G. de Longchamps. On trouvera aussi un tableau de la décomposition des nombres de la forme $10^n - 1$ et $10^n + 1$ publié par Ed. Lucas dans le numéro de juillet 1886 du *Journal de Mathématiques élémentaires* de Bourget (p. 160). M. Brocard s'en est servi pour résoudre le problème suivant : trouver deux ou trois nombres premiers dont le produit se compose de sept, onze, treize ou dix-sept fois le chiffre 1. (*Mathésis*, 1887, p. 73.)

Note XXIV (page 58). — Soit un nombre $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; il est facile de trouver la somme S des diviseurs, car

$$S = (1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \ldots$$

d'après une formule fort simple démontrée en algèbre.

Un nombre parfait est un nombre qui est égal à la somme de tous ses diviseurs excepté lui-même. *Exemple :* $6 = 1 + 2 + 3$. Un nombre est *déficient* quand la somme de ses parties aliquotes est moindre que le nombre. La formule générale de ces nombres est évidemment :

$$2\,(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots)\,(a - 1)\,b - 1) \ldots = a^{\alpha+1} - 1)\,(b^{\beta+1} - 1) \ldots$$

Euclide a démontré (*Éléments*, liv. IX, prop. 36) que si $p = 2^{n+1} - 1$ est un nombre premier, le produit $P = 2^n p$ est un nombre parfait; en effet, la somme des diviseurs de P inférieurs à celui-ci, savoir :

$$\begin{cases} 1, 2, 4 \ldots 2^n \\ p, 2p, 4p \ldots 2^{n-1}p \end{cases}$$

est $2^{n+1} - 1 + p\,(2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 + 2^n p - 2^{n+1} + 1 = P$.

Cette formule donne immédiatement les neuf nombres parfaits suivants en posant successivement $n = 1, 2, 4, 6, 12, 16, 18, 30$ et 126, savoir :

$2\,(2^2 - 1) = 2 \times 3 = 6.$
$2^2\,(2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28.$
$2^4\,(2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496.$
$2^6\,(2^7 - 1) = 64 \times 127 = 8128.$
$2^{12}\,(2^{13} - 1) = 4096 \times 8191 = 33550336.$
$2^{16}\,(2^{17} - 1) = 65536 \times 131071 = 8589869056.$
$2^{18}\,(2^{19} - 1) = 262144 \times 524287 = 137438691328.$
$2^{30}\,(2^{31} - 1) = 1073741824 \times 2147483647 = 2305843008139952128.$
$2^{126}\,(2^{127} - 1) = \ldots\ldots$

Digitized by Google

On ne connait que ces neuf nombres parfaits. (Seelhoff, *Archiv. der Mathematik und Physik*, de Grunert, continuées par Hope. 1885, 2e série, t. II, p. 327-329); remarquons d'ailleurs qu'on n'a jamais pu démontrer qu'il n'y a pas de nombres parfaits impairs.

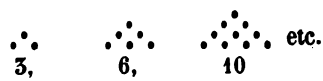
Plusieurs auteurs se sont occupés de ces nombres; on trouvera quelques-uns de ces travaux dans la *Mathésis* de MM. P. Mansion et Neuberg, années 1886, 1887, 1889. Jules *Carvallo* a publié, en 1883, une théorie des nombres parfaits. Nous finirons ectte notice par une propriété très curieuse de *Kraft* (*Mémoires de Pétersbourg*, 1734) : si, dans un nombre parfait, on ajoute ensemble tous les chiffres, on obtient un second nombre ; si l'on a fait de même pour ce second nombre on obtient un troisième nombre qui est divisible par 10.

Des nombres sont *amiables entre eux* quand chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs de l'autre. Il n'y a que trois couples connus de ces nombres : ce sont 220 et 284, 17926 et 18416 enfin 9363584 et 9437056. Ils ont été donnés par *Schooten*. La théorie de ces nombres appartient à l'arithmétique supérieure.

Emile *Lemoine* a étudié, dans une note présentée au congrès de Rouen, en 1883, et à celui de Blois, en 1884, organisés par l'Association française pour l'avancement des sciences, quelques propriétés de nombres qu'il appelle *connexes positifs* : si l'on désigne un nombre entier quelconque par K et par k le nombre entier formé par les mêmes chiffres mais dans l'ordre inverse, et si l'on a $K + H = k + h$ alors K et H sont deux connexes positifs.

Les nombres *harmoniques* sont ceux formés uniquement des facteurs premiers 2, 3, 5 et dont la formule générale est $2^a 3^b 5^c$.

Les nombres *triangulaires* dont la figure ci-dessous donne la signification.



Note XXV (page 67). — Un ancien bénédictin, Bardel, a fait remarquer l'identité suivante : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a(d-c) - c(b-a)}{bd}$; lorsque a et b, c et d diffèrent peu, le numérateur du second membre est plus facile à effectuer que le numérateur $ad - bc$. (*C. R. A.*, t. I, p. 44.)

Digitized by Google

Note XXVI (page 74). — Il est facile de vérifier la formule :

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{3a + b}{a + 3b}\right)^2 - \frac{(b - a)^3}{b\,(a + 3b)^2}$$

et si $a < b$, $\frac{3a + b}{a + 3b}$ est une valeur approchée de $\sqrt{\frac{a}{b}}$; la différence est d'autant plus petite que les termes sont plus grands et que leur différence est plus petite.

Exemple : Soit $\sqrt{\frac{247}{248}}$; par la formule on trouve $\frac{989}{991} = 0,99798$ exacte jusqu'aux cent millièmes inclusivement.

Note XXVII (page 83.) — Toute fraction ordinaire est la somme d'une infinité d'autres. *Exemple :* Soit la fraction $\frac{3}{4}$; on peut la décomposer en une infinité de fractions de 5 en 5 fois plus petites; en effet le quart de 3 est aussi le quart de $\frac{15}{5}$ ou $\frac{3}{5}$ plus le quart de $\frac{3}{5}$ ou $\frac{15}{25}$; le quart de $\frac{15}{25}$ est $\frac{3}{25}$ plus le quart de $\frac{3}{25}$ ou $\frac{15}{125}$; et ainsi de suite; donc $\frac{3}{4} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \ldots$ à l'infini; de même $\frac{7}{9} = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \ldots$; et, en général, $\frac{a}{b} = \frac{a}{b+1} + \frac{a}{(b+1)^2} + \frac{a}{(b+1)^3} + \ldots$.

C'est évidemment la généralisation de l'évaluation d'une fraction ordinaire en décimales.

A l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$, les Grecs n'ont longtemps et exclusivement employé dans leurs calculs que des fractions ayant l'unité pour numérateur. D'après cela, au lieu de $\frac{43}{224}$ ils écrivaient $\frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \frac{1}{224}$.

Note XXVIII (page 85). — I. Certains auteurs démontrent, de la manière suivante, la formation des fractions génératrices :

Soit $x = 0,\ abc\ldots abc\ldots$ une fraction périodique simple dont la période a n chiffres; on aura $10^n x = abc\ldots, abc\ldots\ abc\ldots$; d'où $(10^n - 1)x = abc\ldots$; ce qui démontre la règle.

Soit $x = 0,\ pq\ldots\ abc\ldots\ abc\ldots$ fraction périodique mixte, dont la partie irrégulière a m chiffres et la période n chiffres; on aura successivement :

Digitized by Google

$10^{m+n}x = pq\ldots abc\ldots, abc\ldots abc\ldots$

$10^m x = pq\ldots, abc\ldots - abc\ldots$

D'où $10^m(10^n - 1)x = pq\ldots abc\ldots - pq\ldots$ formule qui démontre aussi la règle.

Ce procédé permet de calculer certaines sommes dont les termes se forment les uns des autres, à l'infini, d'après une loi constante :

Exemples : 1° $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$

il vient $2x - 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots = x$; d'où $x - 2 = 0$ et $x = 2$.

2° $x = 0{,}01020304\ldots$

d'où $100x = 1{,}020304\ldots$ et $99x = 1{,}010101\ldots = 1\frac{1}{99}$, donc $x = \frac{100}{99^2}$.

3° $x = 0{,}01'02\,03'05'08\,13\,21\,34\,55\ldots$ dans laquelle chaque tranche à partir de la troisième, se forme par l'addition des deux précédentes (les tranches peuvent avoir plus de deux chiffres).

On a $100x = 1{,}02\,03\,05\,08\,13\ldots$ d'où $99x = 1{,}01\,01\,02\,03\,05\ldots$; puis $9900x = 101{,}01\,02\,03\,05\ldots$ d'où $9900x - x = 101$; donc $x = \frac{101}{9899}$.

II. On démontre facilement que toute fraction ordinaire dont le dénominateur est un sous-multiple d'un nombre composé de 9 seulement, est une fraction périodique simple dont chaque période a m chiffres; en effet, $\frac{N}{99\ldots} = \frac{N}{10^m - 1} = N(10^m - 1) - 1 = \frac{N}{10^m} + \frac{N}{10^{2m}} + \ldots$

III. On trouvera dans la *Mathésis* (1881, p. 103), une théorie complète des fractions périodiques par M. Mansion, professeur à l'Université de Gand. Il démontre d'abord que toute fraction périodique a une génératrice commensurable, postulat admis par les auteurs sans être énoncé explicitement et dont on peut tirer cette conclusion importante qu'un nombre incommensurable ne peut donner naissance, par approximation indéfinie, à une fraction périodique; ensuite, qu'une fraction décimale a pour limite la fraction génératrice et qu'elle n'en a pas d'autre, ni commensurable ni incommensurable. Enfin, ayant remarqué qu'une fraction décimale limitée et une fraction décimale périodique (0,75 et 0,7499 .. par exemple) peuvent provenir d'une même fraction ordinaire, il établit que la réciproque n'existe pas, c'est-à-dire qu'une même fraction ordinaire ne peut donner naissance à deux fractions périodiques distinctes.

IV. On lira aussi avec fruit la même théorie dans l'excellent traité, d'A. Faifofer, *Elementi d'Aritmetica* (1881); la théorie des fractions périodiques par M. Catalan (*N A M.*, 1842, p. 457); la réduction des fractions ordinaires en décimales par Aug. Bouché (*N A M.*, *Bulletin bibliographique*,

Digitized by Google

1857. p. 52); quelques théorèmes par M. Thibault (*N A M.*, 1843, p 80), et par M. G. De Coninck (*N A M.*, 1846, p. 397); un théorème sur les fractions périodiques dont la génératrice a pour dominateur un nombre premier (*N A M.*, 1846, p. 397); enfin une note par *Desmaret* sur la détermination du nombre des chiffres de la période (*C R A.*, t. XX, p. 103).

V. Nous donnons ici quelques propriétés intéressantes :

Si l'on divise successivement l'unité par 9 et par une suite de nombres se terminant par un 9 comme 19, 29,.... 99, 109, 119.... 999...., on aperçoit entre les différentes fractions décimales consécutives une suite de relations dont la loi est simple et d'où il ressort un procédé de division rapide :

$$\frac{1}{9} = 0,111111\ldots \qquad \frac{1}{99} = 0,010101\ldots \qquad \frac{1}{999} = 0,001001$$

$$\frac{1}{19} = 0,052631\ldots \qquad \frac{1}{109} = 0,009173\ldots$$

$$\frac{1}{29} = 0,034482\ldots \qquad \frac{1}{119} = 0,008403\ldots$$

$$\frac{1}{39} = 0,02564\ldots \qquad \frac{1}{129} = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{1}{139} = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{209} = 004777$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Dans le cas de $\frac{1}{9}$ le premier chiffre décimal est 1 et chaque chiffre suivant est égal au précédent divisé par 1 ; dans le cas de $\frac{1}{19}$, on divise 1 par 2, ce qui donne 05, puis on divise 5 par 2, ce qui donne 2 avec le reste 1 ; on divise 12 par 2 ce qui donne 6 avec le reste 0 ; puis on divise 06 par 2 ce qui donne 3 avec le reste 0, etc. ; dans le cas de $\frac{1}{29}$, on divise 1 par 3 ce qui donne 03 avec le reste 1 ; on divise 13 par 3, ce qui donne 4 avec le reste 1 ; on divise 14 par 3, ce qui donne 4 avec le reste 2 ; on divise 24 par 3, ce qui donne 8 avec le reste 0 et ainsi de suite ; pour $\frac{1}{39}$ on divise 1 par 4, ce qui donne 02 avec le reste 2 ; on divise 22 par 4 ce qui donne 5 avec le reste 2 ; on divise 25 par 4, ce qui donne 6 et ainsi de suite, pour $\frac{1}{49}, \frac{1}{59} \ldots \frac{1}{99}, \frac{1}{119} \ldots \frac{1}{199}, \frac{1}{209} \ldots \frac{1}{999}$, on opère successivement avec les diviseurs 5, 6 ..., 11, 12 ..., 20, 21 ..., 100. Pour les dénominateurs 199, 299, ..., 1999, pour lesquels il faut employer les diviseurs 20, 30... 200, il suffit évidemment de diviser par 2, 3... des tranches de 2, 3... chiffres. Pour la théorie de ce procédé nous

Digitized by Google

renverrons à un mémoire de *Cauchy* intitulé : *Sur les moyens de vérifier ou de simplifier les diverses opérations de l'arithmétique décimale.* (*C R A.*, 1841, t. XI, p. 853.)

VI. Quand le dénominateur d'une fraction $\frac{1}{n}$ est un nombre premier, les fractions décimales périodiques provenant des fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$ se composent des mêmes chiffres et des mêmes périodes mais ne commençant pas au même chiffre décimal. *Exemple* : $\frac{1}{7} = 0{,}1428571428\ldots$ la période est 142857 commençant au chiffre 1 ; $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots$ la période commence au chiffre 2 et elle est 285714, etc., etc. Il y a ainsi un très grand nombre de propriétés fort curieuses quand n est premier. (Voir Goodwyn, *A first centinary.*)

VII. Si la conversion d'une fraction irréductible en fraction décimale donne une fraction périodique, la période est la même, quel que soit le numérateur de la fraction génératrice. H. Sornin s'est occupé de la recherche du nombre des chiffres que fournit à la période une fraction ordinaire réduite en fraction décimale. (*N A M.*, 1848, page 50.)

VIII. Soit la fraction $\frac{1}{n}$ qui donne la période P de k chiffres; on a $10^k - 1 = nP$; donc pour trouver le nombre ou les nombres n qui donnent une période de k chiffres, il faut chercher tous les diviseurs de $10^k - 1$ ou de $\frac{10^k - 1}{9} = 111\ldots$ (k fois le chiffre 1). Par exemple si $k = 1$, $n = 3$ ou 9 ; si $k = 2$, $n = 11$. (*N A M.*, année 1855, p. 115, 118 et 233.)

Note XXIX (page 101). — Il est utile pour comprendre les livres des auteurs anciens, de connaître les noms qu'ils employaient pour désigner certains rapports : le *sesqui-altère* était le rapport de deux quantités dont l'une contient l'autre une fois et demie ; le *sesqui-double* dont l'une contenait l'autre deux fois et demie ; *sesqui-tierce*, trois fois et demie, etc. *Deux quantités étaient dites en raison sous-doublée de deux autres* quand leur rapport était égal à celui des racines carrées des deux autres. La *raison triplée* de deux nombres est le rapport de leurs cubes.

On considérait autrefois plusieurs espèces de proportions : la proportion *discontinue*, la proportion par *égalité*, la proportion *ordonnée*, la proportion *troublée*, enfin la proportion *harmonique*.

On dit que trois nombres a, b, c sont en proportion harmonique quand $a - b : b - c = a : c$; elle est ainsi appelée parce que si l'on fait vibrer la corde d'un instrument à cordes, puis ses $\frac{4}{5}$, ses $\frac{2}{3}$, les trois tons

Digitized by Google

obtenus sont ceux qui composent l'accord parfait majeur, si on les entend simultanément; et les nombres 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ forment une proportion harmonique.

On peut démontrer que l'inverse de la moyenne harmonique est égale à la moyenne arithmétique des inverses des deux extrêmes a et c, c'est-à-dire que $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$.

Les mathématiciens désignaient jadis les changements dans l'ordre des termes d'une *P. G.* par des noms particuliers ; c'est ainsi qu'ils nommaient *alternando* ou *permutando* la transposition des moyens entre eux et *invertendo*, le renversement des rapports qui a lieu quand on met les extrêmes à la place des moyens. (Dictionnaire de Montferrier, article *proportion*.)

Note XXX (page 108). — Dans la *C. M. P* (1825, p. 33), on trouvera une note assez étendue sur la règle de trois dans laquelle on indique le moyen très simple suivant de savoir comment doivent être disposés les deux termes de chacune des fractions : examinez successivement si, dans la supposition que chacun des nombres donnés qui entrent dans la seconde partie de l'énoncé deviendrait nul, le nombre cherché devrait être nul ou infini ; le nombre dont il s'agit, devra être numérateur dans le premier cas, et dénominateur dans le second.

Note XXXbis (page 115). — Dans les banques françaises, on calcule généralement l'intérêt au taux de 6 %, et l'on fait ensuite la conversion si la valeur est à un taux différent : à 2 % on prendra le tiers du 6 %, à 3 la moitié et ainsi de suite.

On peut aussi calculer les intérêts par le *diviseur fixe ;* c'est le dénominateur d'une fraction ordinaire ayant l'unité pour numérateur et représentant l'intérêt d'un franc en un jour au taux donné. *Exemple :* 6000 est le diviseur fixe du taux de 6 % ; connaissant le diviseur fixe, on trouve l'intérêt d'une somme en la multipliant par le nombre de jours pendant lesquels elle est productive d'intérêts et en divisant le produit par le diviseur fixe.

Ces méthodes sont surtout utiles pour établir facilement les comptes courants dans lesquels les sommes sont productives d'intérêts (1).

---

(1) Voir Hipp. Ottevaere, *Des comptes courants et d'intérêts* (1890).

Digitized by Google

Note XXXI (page 145). — Ce problème est résolu d'une manière différente dans l'arithmétique d'Euler; voici la solution qu'il donne : formons d'abord le rapport composé de 2 : 1 et de 5 : 7; c'est 10 : 7, dans lequel l'excès de l'antécédent sur le conséquent est 3; on multiplie ensuite les deux termes du rapport 5 : 7 par 24; on a 120 : 168, et l'excès du second terme sur le premier est 48; on multiplie les deux termes du rapport 1 : 2 par 48, on a 48 : 96; enfin, l'on divise les deux termes de ce dernier rapport par l'excès 3 trouvé plus haut, et l'on obtient 16 : 32 pour l'âge des deux personnes, il y a 24 ans. Euler ajoute « avec un peu d'intelligence on découvre facilement la raison de ces calculs ».

Note XXXII (pages 159). — Lucchesini présenta, en 1839, à l'Académie des sciences de Paris, un mémoire dans lequel il exposait d'abord les principes d'une méthode nouvelle pour résoudre les problèmes d'arithmétique par un système uniforme d'opérations; elle consistait à réduire toutes les questions d'arithmétique à la forme de 3 termes d'une proportion dont le 4e est l'inconnue. Au fond cette méthode revenait à la règle de trois. (*C R A*, t. XI, p. 476.)

On trouve dans les ouvrages consacrés par les anciens auteurs à l'arithmétique un grand nombre de problèmes présentés sous une forme plus ou moins originale dont quelques-uns ne peuvent être résolus que par tâtonnements et dont les autres sont indéterminés.

Voici quelques questions de ce genre tout en reconnaissant que ce genre d'exercices ne donne guère de satisfaction à l'esprit.

Problème I. — *Un nombre est composé de trois chiffres; les deux à droite sont égaux; quand ce nombre est retourné, il vaut* 19 *unités de plus que le double du nombre primitif; et quand on change seulement les deux chiffres à gauche, il vaut* 17 *unités de moins que le double du nombre primitif. Quel est ce nombre?*

Solution

Note. — Nous employons les abréviations suivantes :

Le chiffre des unités	u
Le chiffre des centaines	c
Le nombre cherché	N
Le nombre renversé.	R
Le nombre quand les deux premiers chiffres à gauche sont déplacés	N

Digitized by Google

I. Le double de N est un nombre pair et en ajoutant 19, nombre impair, on doit obtenir un nombre impair; donc R est impair, d'où c est impair.

Le double de N est pair et en retranchant 17, on doit obtenir aussi un nombre impair; donc D est impair; or, quand on a déplacé les deux premiers chiffres à gauche, u est resté le même; donc u est impair.

Conclusion : u et c sont impairs.

II. $2N + 19 = R$ et $2N - 17 = D$;

Par conséquent :

1° $R > 2N$.

Or, $2N$ renferme au moins $2c$ centaines et R renferme u centaines, donc $u \geqq 2c$.

2° $R - D = 19 + 17$ ou 36,

donc aussi $(R - N) - (D - N) = 36$ (principe fondamental de la soustraction.

Il est facile de trouver que $R - N = 99\ (u - c)$ et $D - N = 90\ (u - c)$ donc $9\ (u - c) = 36$ d'où $u - c = 4$.

Il est ainsi prouvé que $u \geqq 2c$ et $u - c = 4$; d'après cela on ne peut faire que les deux hypothèses :

$$c = 1 \text{ et } u = 5$$
$$c = 3 \text{ et } u = 7$$

La première doit être écartée, car $2 \times 155 + 19$ est différent de R ou 551; mais la deuxième est exacte, car $2 \times 377 + 19 = 773$ ou R et $2 \times 377 - 17 = 737$ ou D.

Problème II. — 15 *chrétiens et* 15 *turcs se trouvent sur mer dans un même navire. Il survient une tempête; et après qu'on eut jeté à l'eau toutes les marchandises le pilote annonce qu'il n'y a de moyen de se sauver qu'en jetant encore à la mer la moitié des personnes. Comment faut-il disposer les* 30 *personnes en une rangée, de manière qu'en les comptant jusqu'à* 9 *et jetant le* 10e *par dessus bord, continuant de compter jusqu'à* 9 *et revenant au* 1er, *lorsque le dernier a été compté il reste à la fin les* 15 *chrétiens?* (1).

---

(1) Problème du genre de ceux qu'on appelle de *Caligula;* en voici un du même genre : cent hommes étant disposés sur un rang, on fait sortir du rang le 1er le 11e, le 21e... le 91e; puis on fait serrer le rang. On recommence l'appel de la même manière et l'on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 9 hommes. Quels sont les numéros que possédaient ces hommes dans le rang primitif?

Digitized by Google

Solution. — On trouvera facilement sans le calcul, en exécutant mécaniquement les conditions imposées sur des unités disposées suivant l'ordre prescrit, qu'en désignant par *c* et *t* un chrétien et un turc, il faut ranger les 30 personnes comme suit :

c c t c c c c t t t t t c c t t c c c t c t c t t c t t c t

Problème III. — *Une personne veut acheter quatre litres de lait, mais la laitière n'a que trois cruches, que nous désignerons par* A, B, C *dont la première peut contenir* 8 *litres, la deuxième* 5 *et la troisième* 3. — *Comment doit-elle s'y prendre ?*

Solution. — 1° Remplir *A*, remplir *C* avec *A* et puis *B* avec *C :* il restera 5 litres dans *A*, 3 dans *B*, et *C* sera vide.

2° Remplir *C* avec *A* et achever de remplir *B* avec *C : A* contiendra 2 litres, *C* un litre, *B* sera plein.

3° Vider *B* dans *A* et verser le contenu de *C* dans *B*, il y aura 7 litres dans *A*, un dans *B*, *C* sera vide.

4° Remplir *C* avec *A :* il restera 4 litres dans *A* (1).

Problème IV. — *On propose d'écrire* 1° *le nombre* 4 *avec* 3 *chiffres impairs ; le nombre* 100 *avec* 4 *chiffres impairs ;* 3° *le nombre* 100, *de nombres qui se forment au moyen des dix chiffres employés une seule fois chacun ?*

Solution. — 1° $4 = 3\,\frac{3}{3}$; 2° $100 = 99\,\frac{9}{9}$; 3° $100 = 98 + 1 + \frac{27}{54} + \frac{3}{6} + 0 = 89 + 4 + 6 + \frac{1}{2} + \frac{35}{70} = (9 \times 8) + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0$.

Problème V. — *Écrire les nombres dans les cases d'un carré de manière qu'en les prenant dans une colonne verticale, une rangée horizontale ou une diagonale, on ait toujours le même total ou le même produit.*

Solution :

I. CARRÉ ADDITIF

4	3	8
9	5	1
2	7	6

La somme est 15 dans tous les sens

II. CARRÉ MULTIPLICATIF

243	729	9
1	81	6561
2187	9	27

Le produit est 531441 dans tous les sens.

Digitized by Google

C'est ce qu'on appelle des *carrés magiques* ou *merveilleux*. Remarquons que le premier carré reste magique si l'on ajoute un même nombre à tous les nombres, ou si on les multiplie par un même nombre; il y a une transformation correspondante pour le second carré.

On a donné, dans l'antiquité, une importance symbolique à ces combinaisons qu'on retrouve dans presque tous les talismans; des volumes entiers ont été écrits sur cette matière. Euler s'en est occupé et bien d'autres mathématiciens : Frenicle, Sauveur, Violle, Thompson, Horner, Laquière, Frolow, etc., etc.

Dans une note sur la partition des nombres, *P. Volpicelli* étudie les propriétés d'une série de nombres entiers consécutifs disposés de manière à ce que leur ensemble présente la forme d'un rectangle. (*C R A*, t. XLIV, p. 688.)

Dans les œuvres de Léonard de Pise, on trouve plusieurs problèmes sur des oiseaux; voici une de ces questions :

Quelqu'un achète des moineaux, des tourterelles et des colombes, en tout 30 *oiseaux pour* 30 *deniers; 3 moineaux coûtent* 1 *denier, de même* 2 *tourterelles; et une colombe coûte* 2 *deniers. On demande combien il y avait d'oiseaux de chaque espèce.*

Solution de Léonard de Pise. — J'ai posé d'abord 30 moineaux pour 10 deniers, et j'ai mis de côté 20, différence entre 30 et 10, et j'ai changé un des moineaux en tourterelle; l'augmentation par suite de ce changement est d'un 6e de denier; car le moineau coûte un tiers de denier et la tourterelle un demi-denier, et $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ est $\frac{1}{6}$; j'ai changé derechef un moineau en colombe et j'ai gagné par ce changement $1\frac{2}{3}$ denier, différence entre 2 deniers et un tiers de denier; je réduis le tiers en sixièmes, on obtient $\frac{10}{6}$. Je dois aussi changer les moineaux en tourterelles et en colombes jusqu'à ce que j'obtienne les 20 que j'ai réservés ci-dessus; je réduis ces 20 aussi en sixièmes et l'on a $\frac{120}{6}$ que j'ai divisés en deux parties dont l'une puisse se diviser intégralement par 10 et l'autre par 1, et la somme des deux diviseurs ne doit pas surpasser 30; la première est 110 et l'autre 10; j'ai divisé la première partie, savoir 110, par 10 et la seconde par 1, et j'ai eu 11 colombes et 10 tourterelles, lesquelles retranchées de 30, nombre des oiseaux, il reste 9 pour le nombre des moineaux, et les 9 moineaux valent 3 deniers, les 10 tourterelles 5 deniers, les 11 colombes 22 deniers; on a ainsi 30 oiseaux pour 30 deniers.

Digitized by Google

Léonard prend ensuite les mêmes données, mais en remplaçant 30 par 29; il trouve deux solutions :

Colombes	tourterelles	moineaux
11 ou 10	6 ou 16	12 ou 3;

puis il remplace 30 par 15; il démontre que la solution n'est possible que pour un nombre fractionnaire d'oiseaux, savoir $5\frac{1}{2}$ colombes, 5 tourterelles et $4\frac{1}{2}$ moineaux. Il ramène toutes les questions sur des oiseaux à partager un nombre entier en parties divisibles chacune par un nombre donné, et la somme des quotients ne doit pas surpasser un nombre donné; mais il ne donne pas la règle pour opérer une telle décomposition et il finit par ces paroles : *et sic possumus in similibus etiam in consolamine monetarum et bizantiorium operari, quod quandoque placuerit Dominationi Vestræ liquidius declarabo.* (*N A M.*, bibliographie, 1856, p. 53).

On trouve aussi dans les anciens auteurs des règles pour deviner un résultat, voici deux de ces règles :

1° *On dit à une personne : pensez un nombre; doublez-le; ajoutez-y 4; prenez la moitié du tout; retranchez le nombre pensé* Il doit toujours rester 2.

2° *Pensez un nombre; triplez-le; prenez la moitié si le triple est pair et la moitié du triple plus un s'il est impair; triplez de nouveau le résultat; divisez ce nombre par 9 sans tenir compte du reste.*

Solution. — Le nombre pensé est le double de ce quotient ou le double augmenté de *un* suivant que le triple était pair ou impair.

Voici encore un exemple : *une personne a un nombre pair de jetons dans une main et un nombre impair dans l'autre; il faut deviner dans quelle main est le nombre pair :*

On fait multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair quelconque, et le nombre de la main gauche par un nombre impair; on dit d'ajouter les résultats et l'on demande le chiffre des unités de la somme : 1° s'il est impair, le nombre pair est dans la main droite; 2° s'il est pair, l'impair est dans la droite. C'est ce qu'on démontre facilement.

Euler donne un grand nombre de questions de ce genre, mais celles rapportées ici suffisent pour indiquer comment on peut en créer d'autres à volonté.

A titre de curiosité voici encore quelques problèmes rédigés en vers.

Digitized by Google

I.

BACCHUS ET SILÈNE.

Bacchus, ayant vu Silène
Auprès de sa cuve endormi,
Se mit à boire sans gêne
Aux dépens de son ami.
Ce jeu dura pendant le triple du cinquième
Du temps qu'à boire seul Silène eût employé :
Il s'éveille bientôt, et son chagrin extrême
Dans le reste du vin est aussitôt noyé.
S'il eût bu près de Bacchus même,
Ils auraient, suivant le problème,
Achevé six heures plus tôt;
Alors Bacchus eût eu, pour son écot,
Deux tiers de ce qu'à l'autre il laisse.
Ce qui maintenant m'intéresse
Est de savoir, exactement,
Le temps qu'à chaque drôle il faut séparément
Pour vider la cuve entière,
Sans le secours de son digne confrère.

Cet énoncé fut communiqué à M. Catalan par le savant professeur et philologue Vincent. On en trouve une version différente dans les *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet. Voici la jolie réponse que, vers 1848, un élève du lycée Charlemagne, à Paris, donna à la question :

Dans cette occasion Silène eut tout l'honneur.
En quinze heures Bacchus acheva la besogne;
Il n'en fallut que dix au digne précepteur :
J'en conclus qu'il était de moitié plus ivrogne.

II.

LE VOL DE CONFIANCE, par M. Vitrey.

Mon fût, d'un hectolitre, en ses flancs contenait
Du nectar de Bourgogne;
Chaque soir, au sellier, depuis des jours venait
Mon domestique ivrogne,

Digitized by Google

Qui, tirant, sans mot dire, un litre du tonneau,
Puis, cachant sa vergogne,
A la place du vin mettait un litre d'eau,
S'arrosait le gosier et colorait sa trogne.

Agité de soupçons, sur le soir d'un beau jour,
J'arrive à la sourdine :
Je descends dans ma cave, où j'attrape à mon tour
Le drôle qui rapine
Ah ! pourquoi n'ai-je pu faire alors son portrait !
Quelle piteuse mine !
Il se rendait justice, et sans doute augurait
Que j'allais, d'un gourdin, lui caresser l'échine.

Pauvre caille au filet, corbeau devant l'autour,
Il tente une prière ;
Il bégaie en tremblant un aveu sans détour
Qui mouille sa paupière.
Mais je reste inflexible ; il le mérite bien ;
Et sur ma dette entière,
Pour le vin qu'il m'a pris, je retiendrais combien,
Si l'hectolitre vaut cent francs à la barrière ?

Réponse : 9.56 francs.

III.

When first the Marriage-Knot was tied
Between my Wife and me,
My Age did her's as far exceed
As three Times three does three ;
But when ten Years, and half ten Years,
We Man and Wife had been,
Her Age came up as near to mine
As eight is to sixteen.
Now, tell me, I pray,
What were our Ages on the Wedding Day ?

CHARLES VYSE.

(*The tutor's Guide, being a complete system of arithmetic*, Londres 1799.)

Digitized by Google

IV.

Mulus portabat vinum comitatus Asella ;
Hæc oneris queritur pondera vasta sui :
Ille graves matris gemitus miratur, inquit :
Cur adeo lacrymis lumina mœsta fluunt?
Mollities teneras, mater, decet illa puellas :
Quas premit insuetus debilitatque labor.
Unam mensuram si nostros fundis in utres,
Ipse tui vini pondera dupla feram :
Sin unam contra nostro de fasce lenabis
Portem, tunc æquum pondus uterque feret.
Dic mihi mensuras, ô docte Geometer, istas?
Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

JOACHIM KELLER (XVIe siècle).

Le problème suivant a été posé en France aux examens de jeunes filles :

Si 4 chiens de chasse avec 16 jambes peuvent attraper 29 lapins avec 96 jambes, en 44 minutes ; combien de jambes faudrait-il aux mêmes lapins pour échapper en 7 minutes 30 secondes à 8 chiens de chasse ayant 32 jambes?

Note XXXIII (page 188). — Il faudrait un gros volume pour indiquer toutes les mesures de capacité ; ainsi, à Gand, il y avait de *aard-maten* pour le froment de 25,92 litres ; le *beirleggers* de 25,72 l ; la mesure d'avoine de 38.06 l. ; la mesure pour le charbon de bois de 26,12 l. ; la *mesure sur le port* pour le charbon de terre de 28,93 l. ; la mesure dite *lachmaat* de 26,32 l. aussi pour le charbon de terre ; le *bac* de 25,72 l. pour les cendres ; la mesure pour les moules de 54,81 l. ; le tonneau pour les pommes de 79,17 l. ; celui pour les noix et les marrons de 73,36 l. ; celui pour la tourbe de 65,48 l. ; celui pour les oignons de 53,05 l. ; le *meuken* de 6,43 l. pour la vente en détail des oignons ; la mesure de 25,92 l. servant aux détaillants du sel ; celle de 40,29 l. pour le sel brut ; celle de 34,36 l. pour le sel blanc, etc., etc.

Digitized by Google

Note XXXIV (page 192). — *Principales mesures grecques et romaines.*

I. MESURES ROMAINES

Poids. — La livre romaine (*libra*) se divisait en 12 parties (*unciæ*), dont la somme, considérée comme unité, s'appellait *as*. Elle valait 327 grammes.

Les subdivisions de l'as étaient :

Le $\frac{1}{12}$ qui s'appelait *uncia;* les $\frac{2}{12}$ = *sextans;* les $\frac{3}{12}$ = *quadrans;* les $\frac{4}{12}$ = *triens*; les $\frac{5}{12}$ = *quincunx;* les $\frac{6}{12}$ = *semis* ou *semissis* (moitié de l'as); les $\frac{7}{12}$ = *septunx;* les $\frac{8}{12}$ = *bes* ou *bessis;* les $\frac{9}{12}$ = *dodrans;* les $\frac{10}{12}$ = *dextans* ou *decunx;* les $\frac{11}{12}$ = *deunx.*

Les multiples de l'as étaient :

Le *dupondius* (duo pondo) = 2 as; le *destertius* = 2 $\frac{1}{2}$ as; le *tressis* = 3 as; *l'octussis* = 8 as; le *decussis* = 10 as; le *centussis* = 100 as.

Longueurs. — Le pied (*pes*) équivalant à 296 millimètres (d'après les mesures conservées au musée de Naples). Le pied se divisait en 12 onces (*uncia*) ou en 16 doigts (*digitus*). Le palme (*palmus*) était $\frac{1}{4}$ de pied ou 4 *digiti* ou la largeur de la main et plus tard les $\frac{3}{4}$ du pied. Parmi les multiples on avait le *palmipes* = 1 $\frac{1}{4}$ pied; la coudée (*cubitus*) = 1 $\frac{1}{2}$ pied; le pas (*passus*) = 5 pieds et *l'actus* = 120 pieds = 35,548 mètres.

Sur les routes romaines se trouvaient des bornes milliaires (*lapides*) à des distances de 1000 pas; elles marquaient ainsi des *milles romains* de 5000 pieds, ou de 8 stades, ou de 1481,50 mètres. Une *leuca* (lieue gauloise) = 1 $\frac{1}{2}$ mille romain.

Surfaces. — Le *jugerum* était une mesure agraire de 28,800 pieds romains carrés, ou de 240 pieds de longueur et 120 pieds de largeur, et équivalant à $\frac{1}{4}$ d'hectare à peu près (25,27434 ares).

Volumes. — 1° Pour les liquides, *l'amphore* ou le *quadrantal* d'un pied romain cube contenant 2 urnes (*urnæ*) = 8 conges (*congii*) = 48 setiers (*sextarii*) = 66 hémines (*heminæ*) = 192 *quartarii* = 576 cyathes (*cyathi*) ou bien 25,89 litres. Le seter (*sextarius*), la mesure la plus usitée, équivalait à peu près à un demi-litre, et contenait 12 *cyathes*. Les parties du setier avaient les mêmes noms que les onces ou parties de l'as : ainsi un sextans, quadrans, triens vini = $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ d'un setier = 2, 3, 4 cyathes.

2° Pour les matières sèches, il y avait le *modius* ou boisseau romain, qui était le tiers de l'amphore, et contenait par conséquent 16 setiers = 8,63 litres.

Digitized by Google

Monnaies. — Le bétail servait primitivement à estimer la valeur des choses; de là le nom de *pecunia* qui vient de *pecus* (bétail). Il y eut ensuite une monnaie de cuivre; c'étaient d'abord des morceaux de cuivre sans empreinte (*æs, rude*); plus tard, sous la république, on y mit la figure d'un bœuf, d'un mouton, etc., (*æs signatum*). L'as, comme monnaie, pesait à peu près une livre romaine; de là *as libralis* ou *æs grave*. Pour exprimer plusieurs milliers d'as, on supprimait le mot *asses* et l'on ajoutait *æris* : *centum millia æris* (cent mille as *ou cent mille* livres de cuivre). Quand la livre romaine devint une monnaie avec empreinte, son poids fut réduit à 10 onces; ce poids s'abaissa graduellement jusqu'à 8 $\frac{1}{2}$ onces, et à la fin, vers le commencement de l'empire, il fut réduit à $\frac{1}{3}$ d'once.

En fait de monnaies d'argent, on eut, peu avant la première guerre punique, le denier (*denarius*), valant d'abord 10 as, et ensuite 16 as, après la réduction de l'as. Un demi-denier s'appelait *quinarius*, un quart de denier, *sestertius*, c'est-à-dire 2 $\frac{1}{2}$ as au commencement (de là représenté par HS ou H-S = 2 $\frac{1}{2}$), mais valant 4 as, lorsque le denier valait 16 as. Il y avait des monnaies d'argent plus petites: *libella* = $\frac{1}{10}$ de denier; *sembella* = $\frac{1}{20}$ de denier; *teruntius* = $\frac{1}{40}$ de denier ou 3 onces de vieille monnaie de cuivre, et 4 onces de la monnaie réduite.

Le denier et le sesterce, comparés à notre monnaie, avaient des valeurs différentes selon les époques. Le plus ancien denier valait 1 fr. 25, et le sesterce 0.25 fr.; au commencement de l'empire le denier ne valait plus que 87 centimes à peu près et le sesterce environ 21 centimes. (V. Hultsch *Griechische und römische Metrologie.*)

II. — Mesures grecques et principalement des Athéniens

Longueurs. — L'unité était le *pied attique* ou *olympique* (πούς), qu'on évalue à 308 $\frac{1}{4}$ millim. Les sous-multiples étaient le *doigt* (δάκτυλος) = $\frac{1}{16}$ de pied; le *condyle* (κόνδυλος) = $\frac{1}{8}$ de pied; la *palme* ou *doron* (παλαιστή, δῶρον) = $\frac{1}{4}$ de pied; le *demi-pied* (ἡμιπόδιον, διχάς) = $\frac{1}{2}$ pied; le *spithame* ou *empan* (σπιθαμή, ὀρθόδωρον) = $\frac{3}{4}$ de pied.

Les multiples étaient la *pygme* (πυγμή) = 1 $\frac{1}{8}$ pied; le *pygon* (πυγών) = 1 $\frac{1}{4}$ pied; la *coudée* (πῆχυς) = 1 $\frac{1}{2}$ pied; le *pas* (βῆμα) = 2 $\frac{1}{2}$ pieds; l'*orgye* ou *brasse* (ὀργυιά) = 6 pieds; l'*acène* (ἄκαινα) = 10 pieds; le *hamma* ou *chaîne* (ἅμμα) = 60 pieds; le *plèthre* (πλέθρον) = 100 pieds.

Digitized by Google

Surfaces. — Il y avait le pied carré, l'orgye carrée, l'acène carrée, l'are carrée (ἄρουρα) = 50 pieds carrés, et le plèthre ou arpent grec.

Volumes. — 1° Pour les liquides, la *cotyle* (κοτύλη) = 270 millilitres; le *conge* ou *chus* (χοῦς) = 12 cotyles; l'*amphore* (ἀμφορεύς, διώτη) = 6 conges; le *métrète* (μετρητής) = 12 conges.

2° Pour les matières sèches, la *cotyle*; la *chénice* (χοῖνιξ) = 4 cotyles; la *hémiecte* (ἡμίεκτον) = 4 chénis; l'*hecte* ou *setier grec* (ἑκτεύς) = 2 hémiectes; le *trite* (τριτεύς) = 2 hectes; le *médimne* (μεδιμνος) = 3 trites, un peu plus d'un demi-hectolitre.

Poids. — L'unité était la *drachme* (δραχμή) = 4.363 grammes.

Les multiples étaient la *mine* (μνᾶ) = 100 drachmes; le *talent* (τάλαντον) = 60 mines.

Les sous-multiples étaient le *gramme* (γράμμα) = $\frac{1}{3}$ de la drachme; l'*obole* (ὀβολός) = $\frac{1}{2}$ gramme; le *chalque* (χαλκοῦς) = $\frac{1}{8}$ de l'obole.

Monnaies. — Le nom des monnaies était le même que celui des poids, parce que la valeur des monnaies était déterminée par leur poids en argent.

L'unité de monnaie était la *drachme*, pièce d'argent qui correspond à peu près à notre franc, et qui, d'après le poids moyen des anciennes monnaies attiques, valait, au temps de Périclès, 93 centimes; la drachme ayant successivement diminué de poids, sa valeur n'était plus, au IIe siècle avant Jésus-Christ que de 87 centimes.

Voici les divisions et subdivisions des 3 espèces de monnaie:

Monnaies de cuivre

Le *chalque* (χαλκοῦς) = $\frac{1}{8}$ de l'obole = 2 centimes; le *double-chalque* (δίχαλκον).

Monnaies d'argent

Le *demi-obole* (ἡμιωβόλιον) = $\frac{1}{12}$ du drachme; l'*obole* (ὀβολός) = $\frac{1}{6}$ du drachme; le *diobole* ou double obole (διώβολον); le *tétrobole* ou quadruple obole (τετρώβολον); la *drachme* (δραχμή) = 0.93 fr.; le *didrachme* (δίδραχμον) = 2 drachmes; le *tetradachme* (τετράδραχμον, στατήρ) = 4 drachmes.

Monnaie d'or

Le *statère* (χρυσοῦς στατήρ) = 20 drachmes.

Indépendamment de ces monnaies, on donnait le nom de *mine* (μνᾶ) à une somme de 100 drachmes: et celui de *talent* (τάλαντον) à une somme de 60 mines.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

Préface.
Pages.
Notions préliminaires 1

LIVRE I. — NUMÉRATION

Chapitre I. — Formation des nombres.
§ I. — Nombres entiers 4
§ II. — Nombres fractionnaires 5
Chapitre II. — Numération parlée.
§ I. — Nombres entiers 6
§ II. — Nombres fractionnaires 7
Chapitre III. — Numération écrite.
§ I. - Nombres entiers 7
§ II. — Nombres fractionnaires 8
Chapitre IV. — Lecture des nombres 10

LIVRE II. — CALCUL ET THÉORIE DES NOMBRES

Introduction 12
Première partie. — Nombres entiers.
Chapitre I. — Addition 18
Chapitre II. - Soustraction 19
Chapitre III. — Multiplication 21
Chapitre IV. — Produits continus et puissances 25
Chapitre V. — Division 27
Chapitre VI. — Extraction de la racine.
§ I. - Racine carrée 35
§ II. — Racine cubique 39
Chapitre VII. — Divisibilité.
§ I. — Nombres premiers 42
§ II. — Diviseurs communs. Règles pour le calcul du p. g. c. d 45
§ III. — Caractères de divisibilité 49
§ IV. - Application. Preuves des opérations par 9 et par 11. 54
§ V. — Décomposition des nombres en leurs facteurs premiers 56
§ VI. — Communs multiples 59

Digitized by Google

COLLECTION NATIONALE DE CLASSIQUES

A L'USAGE DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN

PUBLIÉE PAR HECTOR MANCEAUX

ENSEIGNEMENT PRIMAIRE. — ENSEIGNEMENT MOYEN
ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET PROFESSIONNEL, ETC

---

*Tous les ouvrages marqués d'un * sont adoptés ou recommandés par le Conseil de perfectionnement.*

---

1. — LANGUE GRECQUE.

* DUBNER et HURDEBISE. *Grammaire grecque.* 6e édition.	3,00
* — *Chrestomathie grecque.* Versions et thèmes, etc.	2,75
F. DAMOISEAUX. *Style synthétique* chez les historiens latins et grecs.	1,00
* DÉMOSTHÈNE. *Philippiques et Olynthiennes.* Notes par H. COURTOY.	1,75

2. — LANGUE LATINE.

* DELBŒUF et ISERENTANT. *Chrestomathie latine.*	3,00
* LOUIS TONTOR. *Nouvelle chrestomathie latine.* In-8°. 2e éd.	1,25
* LHOMOND. *Epitome historiae sacrae.* 7e édit. E. MARTENS.	1,25
* L. TONTOR. *De viris illustribus urbis Romae.* 3e édition.	1,25
* PHAEDRI *fabularum libri sex.* Notes et dictionnaire, par E. JOPKEN, préfet des études, à Tournai. 4e éd. Cartonné.	1,00
* OVIDII *Metamorphoses.* Texte annoté par A. HUBERT. 3e éd.	1,50
* CICERONIS *de Senectute dialogus.* Notes par HURDEBISE.	0,65
* — *Pro M. Marcello. — Pro Q. Ligario.* Édition annotée par E. JOPKEN.	0,75
* — *Pro T. Annio Milone,* oratio ad iudices. 2e édition, par A. WAGENER, professeur à l'université de Gand.	2,00
— *Pro Archia poeta.* Édition annotée par P. THOMAS, professeur à l'université de Gand.	0,50
* C. SALLUSTIUS CRISPUS. *De Bello Jugurthino liber.* 2e édition, annotée par P. THOMAS.	1,50
— *De Coniuratione liber.* 2e édition, annotée par P. THOMAS.	1,25
* C. SALLUSTI CRISPI. *De Bello Catilinae liber* (1890). — 2e édition, revue et annotée, par P. THOMAS, professeur à l'Université de Gand.	2,50

Digitized by Google